

## 5

ИЗУЧЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Цель работы

Знакомство с понятием "тензор инерции".

## Идея эксперимента

Идея эксперимента заключается в исследовании вращательного и колебательного движений твердого тела правильной формы относительно различных осей, проходящих через центр масс и определения на основе данных эксперимента главных моментов инерции. В процессе работы устанавливается связь между моментом инерции относительно произвольной фиксированной оси и компонентами тензора инерции.

## Теория

Рассмотрим твердое тело, закрепленное таким образом, что оно может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки  $O$ . Тензор инерции будем рассматривать в системе координат, жестко связанной с телом. Существует связь между моментом импульса  $\vec{L}$  тела и угловой частотой  $\vec{\omega}$  (см. введение)

$$\vec{L} = \hat{J} \vec{\omega}, \quad (5.1)$$

где

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum_i \Delta m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i \Delta m_i (x_i y_i) & -\sum_i \Delta m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i \Delta m_i (y_i x_i) & \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i \Delta m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i \Delta m_i (z_i x_i) & -\sum_i \Delta m_i (z_i y_i) & \sum_i \Delta m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix}. \quad (5.2)$$

В том случае, когда вращение твердого тела происходит относительно произвольной закрепленной оси  $AA'$ , проходящей через точку  $O$ , проекция момента импульса тела относительно точки  $O$  на эту ось равна (см. рис. 16)

$$(\vec{L})_{AA'} = \left( \sum_i \Delta m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i \right)_{AA'} = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \omega = J\omega, \quad (5.3)$$

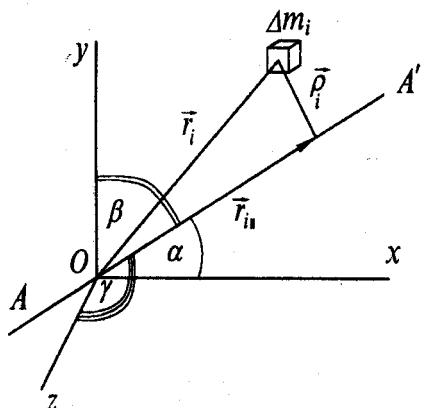


Рис. 16. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси

инерции. В этом случае тензор инерции будет иметь диагональный вид, а соотношение (B.25) запишется так:

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma. \quad (5.5)$$

### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка смонтирована на основании, на котором установлены две стойки с направляющими для винтов, положение одного из которых может регулироваться. Эти винты вставляются в подшипники, которые установлены в рамке специальной конструкции, в результате этого рамка может вращаться вокруг горизонтальной оси (на рис. 17 это ось  $OO'$ ). Рамка состоит из двух планок, одна из которых (на рис. 17 — левая) соединена с цилиндром  $C$ , другая — со шкивом  $Q$ . Эти планки зафиксированы на определенном расстоянии двумя направляющими. На планке с цилиндром установлен конус  $K$  для крепления исследуемого тела. По направляющим перемещается подвижная планка. Эта планка может фиксироваться на направляющих с помощью цанговых зажимов (для этого необходимо повернуть винты на них). В центре подвижной планки имеется винт с конусным наконечником. Исследуемое тело фиксируется между конусом неподвижной левой и конусным винтом подвижной планок, для чего в исследуемых телах имеются специальные углубления.

Закрепление исследуемых тел в рамке может осуществляться перемещением подвижной планки (при отжатых винтах цангового зажима) и вращением винта с коническим наконечником (этим вращением осуществляется более точная установка).

Рамка с исследуемым телом может совершать как вращательное, так и колебательное движение. Вращение происходит при опускании груза  $P$ , висящего на нити, намотанной на шкив  $Q$ . Масса груза и радиус шкива указываются на установке.

Установка снабжена системой автоматического отсчета времени, включающей в себя таймер и два фотоэлектронных датчика для определения

где  $\rho_i$  — расстояние от  $i$ -го элемента тела до оси  $AA'$ , а величина

$$J = \sum_i \Delta m_i \rho_i^2 \quad (5.4)$$

является моментом инерции относительно закрепленной оси.

Значение момента инерции  $J$  твердого тела относительно оси, имеющей произвольное направление, связано с компонентами тензора инерций соотношением (B.25).

В дальнейшем будем использовать такую систему координат, оси которой совпадают с главными осями

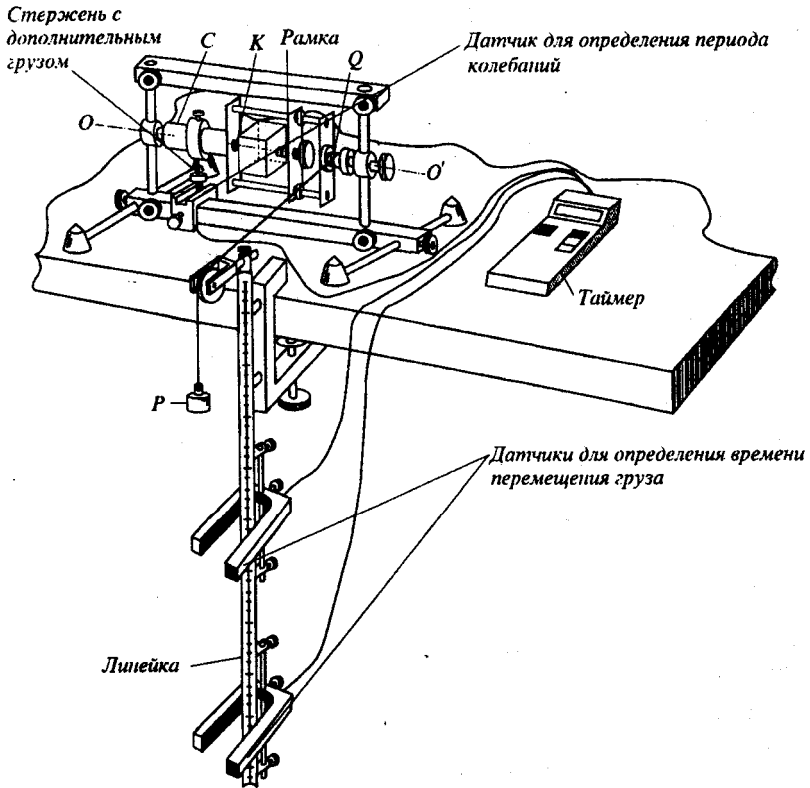


Рис. 17. Общий вид установки для экспериментального определения тензора инерции

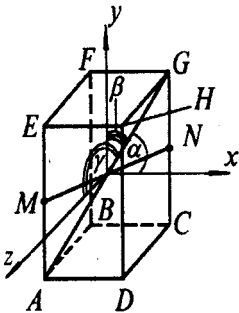


Рис. 18. Схематическое представление параллелепипеда

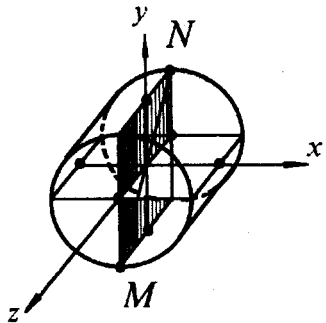


Рис. 19. Схематическое представление цилиндра

времени перемещения груза. Расстояние между датчиками определяется по линейке, укрепленной на установке.

Для определения периодов колебаний рамки с исследуемым грузом на цилиндре  $C$  устанавливается кольцо со стержнем, на котором закреплен дополнительный груз, устанавливаемый в различных положениях. Установка снабжена системой автоматического отсчета периода, включающей в себя таймер и фотоэлектронный датчик для определения периода колебаний.

В работе определяются компоненты тензора инерции однородного металлического параллелепипеда (рис. 18) и цилиндра (рис. 19).

### Проведение эксперимента

#### Упражнение 1. Изучение тензора инерции динамическим методом.

Рассмотрим вращение тела правильной формы, закрепленного в рамке, вокруг некоторой оси под действием момента внешних сил. Момент внешних сил создается с помощью нити, намотанной на шкив, к концу которой подвешен груз массы  $m$  (рис. 20). В качестве исследуемого тела используется параллелепипед.

Пусть груз начал движение от отметки  $x_0$ , затем прошел отметку  $x_1$  со скоростью  $v_1$  и через время  $t$  после этого — отметку  $x_2$  со скоростью  $v_2$ . На основании закона сохранения механической энергии можно написать:

$$mg(x_1 - x_2) = \frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2} + \frac{J'(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{2} + M_{тр} \Delta\varphi, \quad (5.6)$$

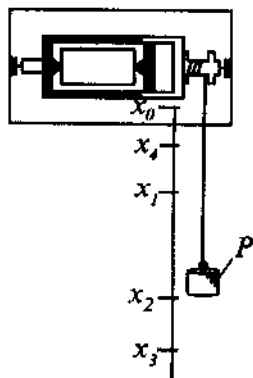


Рис. 20. Схема установки для определения тензора инерции динамическим методом

где  $mg(x_1 - x_2)$  — изменение потенциальной энергии груза,  $\frac{m(v_2^2 - v_1^2)}{2}$  — изменение его кинетической энергии,  $\frac{J'(\omega_2^2 - \omega_1^2)}{2}$  — изменение кинетической энергии вращательного движения рамки с телом,  $M_{тр} \Delta\varphi$  — работа сил трения в оси рамки,  $m$  — масса груза, подвешенного на нити,  $J' = J + J_0$  — момент инерции тела ( $J$ ) и рамки ( $J_0$ ),  $\omega_1, \omega_2$  — угловые скорости вращения рамки для положений груза в точках  $x = x_1$  и  $x = x_2$  соответственно,  $g$  — ускорение свободного падения,  $M_{тр}$  — момент сил трения,  $\Delta\varphi = \frac{x_2 - x_1}{r}$  — угол, на который повернулась рамка при прохождении груза между отметками  $x_1$  и  $x_2$ ,  $r$  — радиус шкива.

Учитывая, что  $v = \omega r$ ,  $v_2 = \sqrt{2a(x_2 - x_0)}$ ,  $x_2 = x_1 + v_1 t + \frac{a t^2}{2}$ , где  $a$  — ускорение груза,  $t$  — время прохождения грузом расстояния  $x_2 - x_1$ , получаем:

$$J' = \frac{mg - M_{тр}/r}{a} r^2 - m r^2 = r^2 \left( \frac{(mg - M_{тр}/r) t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right). \quad (5.7)$$

Для момента инерции пустой рамки (без тела) имеем:

$$J_0 = r^2 \left( \frac{(mg - M_{mp}/r) t_0^2}{2 (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - m \right), \quad (5.8)$$

где  $t_0$  — время прохождения грузом расстояния  $x_2 - x_1$ . Из двух последних уравнений для момента инерции тела относительно оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0 = r^2 \frac{mg - M_{mp}/r}{2 (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} (t^2 - t_0^2). \quad (5.9)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять моменты инерции тела относительно произвольных осей. Это можно сделать, в частности, для главных центральных осей, совпадающих с выбранными осями координат ( $J_x, J_y, J_z$ ), а также для осей, совпадающих с одной из диагоналей параллелепипеда, например  $AG$  ( $J_{AG}$ ) или  $MN$  ( $J_{MN}$ ) (см. рис. 18), выразив их соответственно через времена опускания груза  $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$ .

Момент сил трения, входящий в (5.9), можно оценить следующим образом. Если отпустить груз на отметке  $x_0$ , то он после опускания до нижней точки  $x_3$  поднимется затем до отметки  $x_4$ . Разность значений потенциальной энергии груза в точках  $x_4$  и  $x_0$  и будет равна работе сил трения. То есть

$$mg(x_4 - x_0) = \frac{M_{mp}}{r} (x_3 - x_0) + \frac{M_{mp}}{r} (x_3 - x_4), \quad (5.10)$$

где  $\frac{M_{mp}}{r} (x_3 - x_0)$  — работа сил трения при движении груза вниз от верхней точки до полного разматывания нити,  $\frac{M_{mp}}{r} (x_3 - x_4)$  — работа сил трения при подъеме груза. Из (5.10) следует

$$\frac{M_{mp}}{r} = mg \frac{(x_4 - x_0)}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (5.11)$$

Пусть размер параллелепипеда (см. рис. 18) по оси  $Ox$  равен  $a$ , по оси  $Oy$  —  $b$ , по оси  $Oz$  —  $c$ . Квадраты направляющих косинусов для его диагонали  $AG$  соответственно равны

$$\begin{aligned} \cos^2 \alpha &= \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \\ \cos^2 \beta &= \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2}, \\ \cos^2 \gamma &= \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \end{aligned} \quad (5.12)$$

Подстановка уравнений (5.9) (для различных осей вращения) и (5.12)

в формулу (5.5) для момента инерции относительно закрепленной оси дает

$$\begin{aligned} & \frac{r^2 (mg - M_{mp}/r) (t_{AG}^2 - t_0^2)}{2 (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} = \\ & = \frac{a^2}{a^2 + b^2 + c^2} \frac{r^2 (mg - M_{mp}/r) (t_x^2 - t_0^2)}{2 (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} + \\ & + \frac{b^2}{a^2 + b^2 + c^2} \frac{r^2 (mg - M_{mp}/r) (t_y^2 - t_0^2)}{2 (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} + \\ & + \frac{c^2}{a^2 + b^2 + c^2} \frac{r^2 (mg - M_{mp}/r) (t_z^2 - t_0^2)}{2 (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}. \end{aligned}$$

Так как сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, то получаем:

$$t_{AG}^2 = \frac{a^2 t_x^2 + b^2 t_y^2 + c^2 t_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (5.13)$$

Эту закономерность можно проверить экспериментально.

### Измерения

1. Для выполнения работы необходимо измерить радиус шкива  $r$  и размеры тела (ребра параллелепипеда)  $a$ ,  $b$ ,  $c$ . Величины  $a$ ,  $b$ ,  $c$ ,  $r$  измеряют штангенциркулем не менее трех раз в различных сечениях тела, заносят их в табл. 5.1.

Таблица 5.1

$N$	$a$	$\langle a \rangle, S_{\langle a \rangle}$	$b$	$\langle b \rangle, S_{\langle b \rangle}$	$c$	$\langle c \rangle, S_{\langle c \rangle}$	$r$	$\langle r \rangle, S_{\langle r \rangle}$
1								
2								
3								

2. Заносят в таблицу 5.2 значения  $x_0, x_1, x_2, x_3$ . Взвешивают груз  $P$  и заносят в табл. 5.2 его массу.

3. Определяют время опускания груза  $P$  при пустой рамке  $t_0$ . Для этого нить, имеющую на конце груз, аккуратно виток к витку наматывают полностью на шкив. Освобождают груз. Измерение времени необходимо проводить не менее трех раз. Данные заносят в таблицу 5.2. Одновременно для каждого опыта в таблицу заносят значения  $x_4$ .

4. Закрепляют в рамке параллелепипед в разных положениях и

измеряют времена  $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$  не менее трех раз. Результаты заносят в табл. 5.3.

Таблица 5.2

Параметры исследуемой системы	$N$	$t_0$	$\langle t_0 \rangle, S_{t_0}$	$x_4$	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{TP}}{r}$	$\frac{S_{M_{TP}}}{r}$
$x_0 =$	1						
$x_1 =$	2						
$x_2 =$	3						
$x_3 =$	4						
$m =$	5						

Таблица 5.3

$N$	$t_x$	$\langle t_x \rangle, S_{\langle t_x \rangle}$	$t_y$	$\langle t_y \rangle, S_{\langle t_y \rangle}$	$t_z$	$\langle t_z \rangle, S_{\langle t_z \rangle}$	$t_{AG}$	$\langle t_{AG} \rangle, S_{\langle t_{AG} \rangle}$	$t_{MN}$	$\langle t_{MN} \rangle, S_{\langle t_{MN} \rangle}$
1										
2										
3										

### Обработка результатов

1. Определяют средние арифметические значения  $a, b, c, r$  и выборочные стандартные отклонения для этих величин. Данные заносят в табл. 5.1.

2. Находят средние арифметические значения и выборочные стандартные отклонения для  $t_0$  и  $x_4$ . Данные заносят в табл. 5.2. По формуле

(5.15) находят величину  $\frac{M_{TP}}{r}$  и погрешность ее определения.

3. Находят средние арифметические значения  $t_x, t_y, t_z, t_{AG}, t_{MN}$  погрешности их определения. Результаты заносят в табл. 5.3.

4. По формуле (5.9) находят экспериментальные значения величин  $J_x, J_z, J_{MN}$  и их погрешности. Данные заносят в табл. 5.4.

Таблица 5.4

$J_x$	$S_{J_x}$	$J_z$	$S_{J_z}$	$J_{MN}$	$S_{J_{MN}}$	$J_{MN}^{теор}$	$S_{J_{MN}^{теор}}$

5. В связи с тем, что ось  $MN$  лежит в плоскости  $xz$ , то соотношение (5.5) для  $J_{MN}$  принимает вид

$$J_{MN} = J_x \cos^2 \alpha + J_z \cos^2 \gamma.$$

Подставляя в это выражение определенные в п.4 значения  $J_x, J_y$ , вычисляют теоретическое значение  $J_{MN}^{\text{теор}}$  и сравнивают его с экспериментальным (табл. 5.4).

б. Подставляя в (5.13) определенные экспериментально геометрические размеры  $a, b, c$  и времена опускания груза  $t_x, t_y, t_z, t_{AG}$  для различных способов крепления тела в рамке, убеждаются в правильности (в пределах погрешности измерений) соотношения (5.13), а следовательно, и уравнения (5.5).

### Упражнение 2. Изучение тензора инерции методом колебаний

Рассмотрим малые колебания физического маятника, представляющего собой сложное тело, состоящее из рамки, закрепленного на стержне дополнительного груза и исследуемого тела, в качестве которого выбран параллелепипед (рис. 18) или цилиндр (рис. 19). Колебания происходят вокруг оси, проходящей через центр масс рамки и исследуемого тела. Действие моментов сил тяжести, приложенных к стержню и добавочному грузу, закрепленному на нем, приводит к возникновению колебаний всей системы. Основное уравнение вращательного движения в этом случае имеет вид

$$J' \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \left( mgl \varphi + \frac{1}{2} m_0 g l_0 \varphi \right), \quad (5.14)$$

где  $\varphi$  — угол отклонения рамки от положения равновесия,  $m$  — масса груза,  $l$  — расстояние от центра масс груза до оси вращения,  $m_0, l_0$  — масса и длина стержня, на котором закреплен дополнительный груз,  $J' = J + J_0$  — момент инерции физического маятника, включающего в себя исследуемое тело ( $J$ ) рамку со стержнем и дополнительным грузом ( $J_0$ ).

Уравнение (5.14) является уравнением собственных свободных колебаний

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega_0^2 \varphi = 0, \quad (5.15)$$

где циклическая частота собственных колебаний определяется из соотношения

$$\omega_0^2 = \frac{\left( mgl + \frac{1}{2} m_0 g l_0 \right)}{J'}.$$

Так как  $\omega = \frac{2\pi}{T}$ , то

$$J' = \frac{\left( mgl + \frac{1}{2} m_0 g l_0 \right) T^2}{4\pi^2}. \quad (5.16)$$

Определив период колебаний рамки без тела  $T_0$ , можно найти момент инерции маятника без тела —  $J_0$ .

Для момента инерции исследуемого тела относительно фиксированной оси вращения получаем:  $J = J' - J_0$ , или



$$J = \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) \cdot (T^2 - T_0^2)}{4\pi^2}. \quad (5.17)$$

Пользуясь этой формулой, можно определять моменты инерции тела относительно произвольных осей.

В частности, для параллелепипеда можно определить  $J_x, J_y, J_z$  для осей, совпадающих с главными центральными осями (рис. 18), а также момент инерции относительно оси, совпадающей с одной из диагоналей параллелепипеда — например  $AG$ , выразив  $J_x, J_y, J_z, J_{AG}$  в соответствии с (5.17) через периоды колебаний  $T_x, T_y, T_z, T_{AG}$  и период колебаний пустой рамки  $T_0$ .

Выразим момент инерции тела относительно оси  $AG$  в соответствии с уравнением (5.9) через  $J_x, J_y, J_z$ :

$$J_{AG} = J_x \cos^2 \alpha + J_y \cos^2 \beta + J_z \cos^2 \gamma,$$

или

$$\begin{aligned} \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) (T_{AG}^2 - T_0^2)}{4\pi^2} &= \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) (T_x^2 - T_0^2)}{4\pi^2} \cos^2 \alpha + \\ &+ \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) (T_y^2 - T_0^2)}{4\pi^2} \cos^2 \beta + \frac{\left(mgl + \frac{1}{2}m_0gl_0\right) (T_z^2 - T_0^2)}{4\pi^2} \cos^2 \gamma. \end{aligned}$$

Учитывая, что сумма квадратов направляющих косинусов равна единице, получаем

$$T_{AG}^2 = T_x^2 \cos^2 \alpha + T_y^2 \cos^2 \beta + T_z^2 \cos^2 \gamma,$$

или

$$T_{AG}^2 = \frac{a^2 T_x^2 + b^2 T_y^2 + c^2 T_z^2}{a^2 + b^2 + c^2}. \quad (5.18)$$

Это уравнение можно проверить экспериментально.

Рассматривая колебания цилиндра относительно осей  $Oy, Oz, MN$ , можно найти величины  $J_y, J_z, J_{MN}$  определяя, соответственно, периоды колебаний  $T_y, T_z, T_{MN}$ .

Рассмотрим колебания цилиндра относительно оси  $MN$  (рис. 19). Направляющие косинусы для этой оси равны

$$\cos^2 \gamma = \frac{d^2}{4R^2 + d^2}, \quad \cos^2 \beta = \frac{4R^2}{4R^2 + d^2}, \quad \cos \alpha = 0, \quad (5.19)$$

где  $R$  — радиус цилиндра,  $d$  — его длина.



3. Измеряют время  $t_{n0}$  3—5 колебаний рамки без тела. Измерения проводят не менее 3-х раз. Данные заносят в табл. 5.7.

Таблица 5.7

## Характеристики колебательного движения цилиндра

$N$	$n_0$	$t_{n0}$	$T_0$	$n_z$	$t_{nz}$	$T_z$	$n_y$	$t_{ny}$	$T_y$	$n_{MN}$	$t_{n_{MN}}$	$T_{MN}$

4. Закрепляют в рамке цилиндр, измеряют времена  $t_n$  для колебаний цилиндра относительно осей  $z$ ,  $y$ ,  $MN$ . Результаты заносят в табл. 5.7.

## Обработка результатов

1. Определяют средние арифметические значения и среднеквадратичные отклонения для размеров цилиндра и параллелепипеда и их погрешности. Результаты заносят в табл. 5.8.

Таблица 5.8

$a$ , $S_a$	$b$ , $S_b$	$c$ , $S_c$	$R$ , $S_R$	$d$ , $S_d$

2. Находят средние значения периодов колебаний параллелепипеда  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $T_{AG}$ . Находят погрешности этих величин. Результаты заносят в табл. 5.9.

3. Подставляют в (5.18) определенные экспериментально геометрические размеры и периоды колебаний маятника для различных способов крепления параллелепипеда в рамке. Находят ошибки определения величин, стоящих в правой и левой частях уравнения (5.18). Убеждаются в правильности равенства (5.18) в пределах ошибок измерений.

Таблица 5.9

$\langle T_x \rangle$ , $S_{\langle T_x \rangle}$	$\langle T_y \rangle$ , $S_{\langle T_y \rangle}$	$\langle T_z \rangle$ , $S_{\langle T_z \rangle}$	$\langle T_{AG} \rangle$ , $S_{\langle T_{AG} \rangle}$

4. Находят средние значения периодов колебаний цилиндра  $T_z$ ,  $T_y$ ,  $T_{MN}$  и пустой рамки  $T_0$  и их погрешности. Результаты вносят в табл. 5.10. Определяют по формуле (5.17) значения моментов инерции  $J_z$ ,  $J_y$ ,  $J_{MN}$  для цилиндра. Находят погрешности этих величин. Результаты заносят в табл. 5.11.

Таблица 5.10

$\langle T_0 \rangle$ , $S_{\langle T_0 \rangle}$	$\langle T_y \rangle$ , $S_{\langle T_y \rangle}$	$\langle T_z \rangle$ , $S_{\langle T_z \rangle}$	$\langle T_{MN} \rangle$ , $S_{\langle T_{MN} \rangle}$

5. Подставляя в (5.20) определенные в п.4 значения  $J_z$ ,  $J_y$ , находят теоретическое значение момента инерции  $J_{MN}$ , сравнивают его с экспериментальным (найденным в п.4).

Таблица 5.11

$J_x$	$S_{J_x}$	$J_y$	$S_{J_y}$	$J_{MN}$	$S_{J_{MN}}$	$J_{MN}^{теор}$	$S_{J_{MN}}^{теор}$

### Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть проверено соотношение (5.13) или (5.18) и проведено сравнение экспериментального и теоретического значений величины момента инерции при вращении тела относительно оси MN.

### Контрольные вопросы

1. Записать уравнение моментов и объяснить смысл входящих в него величин.
2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?
3. Записать компоненты тензора инерции для простейших систем тонкая палочка, система материальных точек.
4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси? Примеры.
5. Как направлены векторы угловой скорости и момента количества движения при вращении тела вокруг закрепленной оси
  - 1) если ось вращения совпадает с одной из главных осей;
  - 2) если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?
6. Связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси.
7. Что такое эллипсоид инерции? Как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

### Литература

1. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика твердого тела. Лекции (Университетский курс общей физики). М.: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1989. §53.

## 6

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕНЗОРА ИНЕРЦИИ  
ТВЕРДОГО ТЕЛА

## Цель работы

*Изучение тензора инерции твердого тела.*

## Идея эксперимента

С помощью крутильного маятника, представляющего собой рамку с исследуемым телом, закрепленную на упругом подвесе, определяется момент инерции тела относительно закрепленной оси. Сравнивая период колебаний маятника без тела и с телом, можно найти момент инерции тела относительно фиксированной оси. Компоненты тензора инерции относительно системы координат, жестко связанной с телом, определяются из нескольких таких опытов, отличающихся направлением оси вращения тела при колебаниях маятника.

## Теория

Рассмотрим колебания крутильного маятника, представляющего собой сложное тело, состоящее из рамки, закрепленной на вертикальной упругой проволоке, и исследуемого тела (рис. 21). Действие момента сил упругости приводит к возникновению колебаний всей системы с периодом

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J'}{D}}, \quad (6.1)$$

где  $D$  — коэффициент упругости подвеса,  $J'$  — момент инерции рамки с исследуемым телом.

Из соотношения (6.1) можно найти момент инерции  $J'$ :

$$J' = \left(\frac{T}{2\pi}\right)^2 D. \quad (6.2)$$

Определяя период колебаний пустой рамки  $T_0$ , можно найти момент инерции маятника без тела —  $J_0$ :

$$J_0 = \left(\frac{T_0}{2\pi}\right)^2 D. \quad (6.3)$$

Для момента инерции исследуемого тела относительно фиксированной оси вращения получаем:

$$J = J' - J_0. \quad (6.4)$$

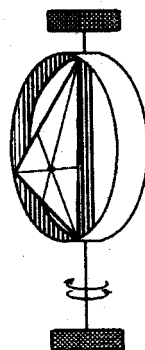


Рис. 21. Устройство крутильного маятника

Меняя положение тела относительно рамки, можно определять его моменты инерции для осей вращения, имеющих различное направление относительно тела.

Тензор инерции будем рассматривать в системе координат, жестко связанной с телом. При этом, как показано во введении,

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma, \quad (6.5)$$

где  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  — углы, определяющие положение оси вращения тела относительно системы координат, связанной с исследуемым телом.

Используемая в задаче установка удобна для определения моментов инерции "плоских тел" — т.е. таких тел, толщина которых значительно меньше их поперечных размеров. При этом одну из осей (например ось  $Oz$ ) связанной с телом системы координат удобно направить перпендикулярно плоскости тела. Оси  $Ox$  и  $Oy$  находятся в плоскости тела и их направления произвольны, начало координат совпадает с центром масс тела и находится на оси вращения (рис. 22). При этом один из направляющих косинусов ( $\cos \gamma$ ) равен нулю, и вместо (6.5) получим

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta. \quad (6.6)$$

Величина  $J$  — момент инерции данного тела при вращении вокруг определенной оси, проходящей через его центр масс. При повороте системы координат (осей  $Ox$  и  $Oy$  в своей плоскости), величина момента инерции

$J$  не изменяется, но каждой ориентации осей соответствуют свои значения компонент тензора инерции  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$  и  $J_{xy} = J_{yx}$ .

При определенном выборе системы координат, когда направления осей  $Ox'$  и  $Oy'$  совпадают с главными осями инерции тела,  $J_{xy} = J_{yx} = 0$ , и вместо (6.6) имеем

$$J = J'_x \cos^2 \alpha' + J'_y \cos^2 \beta'. \quad (6.6a)$$

В последнем соотношении  $\cos \alpha'$  и  $\cos \beta'$  — направляющие косинусы выбранной ранее оси вращения в новых осях координат  $Ox'$ ,  $Oy'$ ,  $J'_x$  и  $J'_y$  — компоненты тензора инерции в системе координат, оси которой совпадают по направлению с главными осями инерции.

Выберем на оси вращения некоторую точку  $P$ , находящуюся на расстоянии  $R$  от начала координат и имеющую координаты  $x'$  и  $y'$ . Пусть величина  $R$  численно равна  $\frac{1}{\sqrt{J}}$ . При этом  $\cos \alpha' = \frac{x'}{R}$ ,  $\cos \beta' = \frac{y'}{R}$ . Подставив эти величины в (6.7a), получим, что

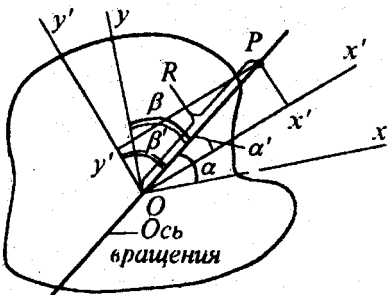


Рис. 22. Схематическое представление тела и систем координат  $xOy$ ,  $x'Oy'$ . Ось вращения  $OP$  и системы координат лежат в плоскости чертежа

$$J = J'_x \frac{x'^2}{R^2} + J'_y \frac{y'^2}{R^2},$$

или

$$\frac{x'^2}{a^2} + \frac{y'^2}{b^2} = 1, \quad (6.66)$$

где  $a^2 = \frac{JR^2}{J'_x}$ ;  $b^2 = \frac{JR^2}{J'_y}$ ,  $a$  и  $b$  являются постоянными величинами.

Уравнение (6.66) является каноническим уравнением эллипса в координатах  $x'$ ,  $y'$ , полуоси которого  $a = \frac{1}{\sqrt{J'_x}}$ ,  $b = \frac{1}{\sqrt{J'_y}}$ .

Эллипс (6.66) является сечением эллипсоида инерции плоскостью  $x'y'$ . Эллипсоидом инерции называется поверхность, характеризующая величины моментов инерции твердого тела относительно множества всевозможных осей вращения, проходящих через одну точку (в данном случае через центр масс тела). При этом для каждого направления вдоль оси  $l$  откладываются отрезки, численно равные величине  $\frac{1}{\sqrt{J_l}}$ , где  $J_l$  — момент инерции тела относительно оси  $l$ . Концы этих отрезков образуют поверхность, называемую эллипсоидом инерции (трехмерное уравнение эллипсоида инерции может быть получено из (6.5)).

Пусть исследуемое тело имеет форму, показанную на рис. 23. Точка  $O$  — центр масс тела. Оси  $Ox$  и  $Oy$  выбраны произвольно. Тело закреплено в рамке крутильного маятника так, что точка  $O$  лежит на оси вращения, а положение тела характеризуется углом  $\alpha$  ( $\beta = \frac{\pi}{2} - \alpha$ ).

Если тело закреплено в рамке так, как показано на рис. 24а, то  $\alpha = 0$  и  $\beta = \frac{\pi}{2}$ . Из (6.6) получаем, что

$$J = J_1 = J_{xx}. \quad (6.7)$$

При закреплении тела, соответствующем рис. 24б,  $\alpha = \frac{\pi}{2}$  и  $\beta = 0$ . И, следовательно, из (6.6)

$$J = J_2 = J_{yy}. \quad (6.8)$$

При повороте тела в своей плоскости на угол  $\alpha_0$  (рис. 24в) и  $-\alpha_0$  (рис. 24г) относительно оси вращения получаем, соответственно,

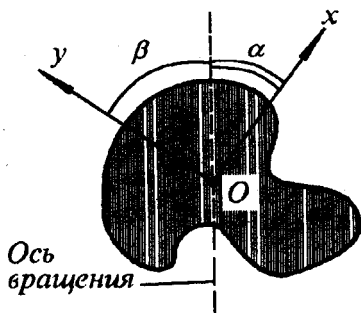


Рис. 23. Форма и положение тела относительно оси вращения

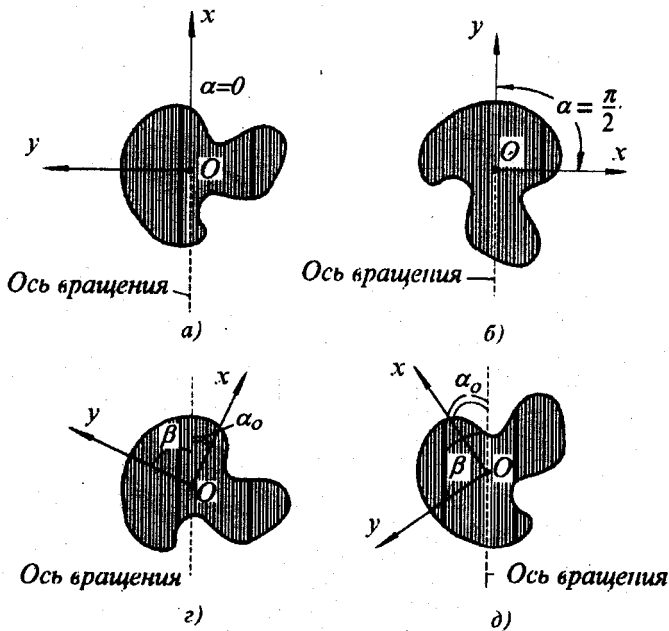


Рис. 24. Положения тела относительно оси вращения

$$J = J_3 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 + J_{xy} \sin 2\alpha_0, \quad (6.9)$$

$$J = J_4 = J_{xx} \cos^2 \alpha_0 + J_{yy} \sin^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (6.10)$$

Из (6.9) и (6.10) следует, что

$$J_3 - J_4 = 2J_{xy} \sin 2\alpha_0 \quad \text{или} \quad J_{xy} = \frac{J_3 - J_4}{2 \sin 2\alpha_0}. \quad (6.11)$$

Из (6.6) можно получить, что если  $\alpha = \alpha_0 + \frac{\pi}{2}$ , то

$$J = J_5 = J_{xx} \sin^2 \alpha_0 + J_{yy} \cos^2 \alpha_0 - J_{xy} \sin 2\alpha_0. \quad (6.12)$$

Складывая (6.9) и (6.12), получаем:

$$J_3 + J_5 = J_1 + J_2. \quad (6.13)$$

Экспериментальное определение величин  $J_1$ ,  $J_2$ ,  $J_3$  и  $J_4$  дает возможность найти четыре отличных от нуля компоненты тензора инерции плоского тела:  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{xy} = J_{yx}$  для заданной системы координат. Если оси координат  $Ox$  и  $Oy$  совпадают с главными осями инерции тела, то  $J_{xy} = J_{yx} = 0$ . Соотношение (6.13) может служить проверкой правильности проведенного эксперимента.



### Экспериментальная установка

Экспериментальная установка показана на рис. 25. Она состоит из стойки и рамки, закрепленной на упругом подвесе. Исследуемые тела поочередно крепятся в рамке с помощью винта. Конструкция крепления

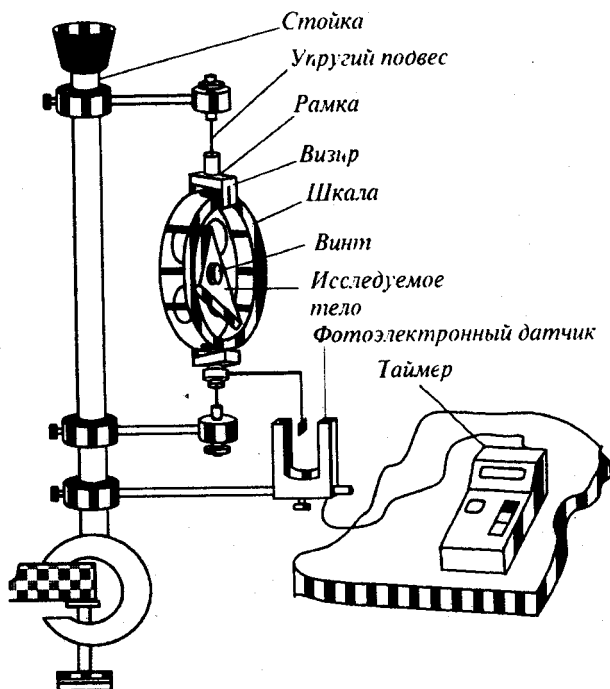


Рис 25. Устройство установки для изучения тензора инерции твердого тела

рамки на подвесе такова, что рамка может поворачиваться вокруг горизонтальной оси и фиксироваться в различных положениях. В работе изучаются тензоры инерции для нескольких "плоских" тел, имеющих разную форму: малых по толщине параллелепипеда, треугольной призмы, полудиска, а также для тел, конфигурация которых может меняться в процессе эксперимента. Система координат, относительно которой определяется момент инерции тела, жестко связана с телом, а, следовательно, и с рамкой. На рамке имеется шкала, позволяющая определять углы между осью вращения и осями системы координат, связанной с телом.

Установка снабжена системой автоматического отсчета времени и числа периодов, включающей в себя таймер и фотоэлектронный датчик.

### Проведение эксперимента

**Упражнение 1.** Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки.

Определение упругости нити подвеса осуществляется из результатов изучения колебаний длинного металлического стержня, закрепленного с помощью специального приспособления в рамке перпендикулярно оси

вращения. Предполагается, что предварительно измерена его длина и масса и вычислен его момент инерции, а также определены погрешности этих величин (результаты измерений и расчетов необходимо внести в табл. 6.1)

Таблица 6.1

Длина стержня $L =$	$S_L =$
Масса стержня $m =$	$S_m =$
Момент инерции стержня относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной стержню, $J =$	$S_J =$

### Измерения

1. Измерить время  $t_n$   $n = 10 - 20$  колебаний пустой рамки. Измерения провести несколько раз, данные занести в табл. 6.2.
2. Закрепить стержень в рамке симметрично. Измерить время  $t_n$  10—20 колебаний рамки со стержнем. Измерения провести несколько раз, данные занести в табл. 6.2.

### Обработка результатов

1. Для каждого опыта определить периоды колебаний пустой рамки  $T_0$  и рамки со стержнем  $T_2$ .
2. Найти средние арифметические значения  $\langle T_0 \rangle$  и  $\langle T_2 \rangle$  и выборочные стандартные отклонения для этих величин  $S_{T_0}$ ,  $S_{T_2}$ . Результаты вычислений внести в табл. 6.2.

Таблица 6.2

Колебания без стержня						Колебания со стержнем					
$N$	$t_n$	$n$	$T_0$	$\langle T_0 \rangle$	$S_{T_0}$	$N$	$t_n$	$n$	$T_2$	$\langle T_2 \rangle$	$S_{T_2}$
1						1					
2						2					
3						3					
. . . . .											

3. Учитывая, что период колебаний крутильного маятника связан с моментом инерции соотношением (6.1), получаем, что

$$T_2^2 - T_0^2 = 4\pi^2 \frac{J_{\text{ст}}}{D},$$

где  $J_{\text{ст}}$  — вычисленный ранее момент инерции стержня.

Отсюда следует, что

$$D = \frac{4\pi^2 J_{\text{ст}}}{T_2^2 - T_0^2}.$$

Используя последнее соотношение, определить коэффициент упругости подвеса, а затем по формуле (6.3) — момент инерции пустой рамки  $J_0$ .

**Упражнение 2. Определение сечения эллипсоида инерции.**

### Измерения

1. Для выполнения работы необходимо измерить размеры одного из тел по указанию преподавателя (ребра параллелепипеда, стороны треугольной призмы, радиус полудиска). Данные занести в табл. 6.3.

2. Все тела, исследуемые в данной задаче, закрепляются в рамке благодаря ее конструкции, таким образом, что их центр масс лежит на оси вращения. Закрепив в рамке выбранное тело, измеряют время  $t_n$   $n = 10 - 20$  колебаний. Проводят несколько таких измерений. Поворачивают рамку на небольшой угол (например на  $15^\circ$ ), и вновь измеряют время  $t_n$ . Снова поворачивают рамку на такой же угол и проводят измерения  $t_n$ . Так поступают до полного поворота рамки на  $180^\circ$ . Результаты каждого измерения заносят в табл. 6.3.

Таблица 6.3

Форма и размеры исследуемого тела:								
$N$	$\alpha_i$	$t_n$	$n$	$T$	$\langle T_\alpha \rangle$	$S_{T_\alpha}$	$J_\alpha$	$\sqrt{\frac{1}{J_\alpha}}$
1								
2								
3								
1								
2								
3								
1								
2								
3								
.....								

### Обработка результатов

1. Находят периоды колебаний маятника для каждого значения  $\alpha$ , их средние значения  $\langle T_\alpha \rangle$  и выборочные стандартные отклонения  $S_{T_\alpha}$ . Величины заносят в табл. 6.3.

2. Определяют моменты инерции исследованного тела по формулам (6.2)—(6.4) для разных значений  $\alpha$ . Данные заносят в табл. 6.3.

3. Строят в полярных координатах  $R(\alpha)$  сечение эллипсоида инерции  $R = \frac{1}{\sqrt{J(\alpha)}}$  для исследованного тела, считая, что  $J(180^\circ + \alpha) = J(\alpha)$ . На этом же графике необходимо нарисовать и исследуемое тело.

4. Определяют положения рамки, при которых момент инерции принимает максимальное и минимальное значения. Эти положения соответствуют главным центральным осям инерции изучаемого тела.

5. Используя известные формулы (см. Приложение), рассчитывают величины моментов инерции тела относительно всех трех главных центральных осей и сравнивают полученные значения с экспериментальными. При этом теоретическое значение  $J_z$  сравниваются с суммой значений  $J_x$ ,  $J_y$ , полученной экспериментально, поскольку для плоских тел (см. Приложение)  $J_z = J_x + J_y$ .

### Упражнение 3. Определение компонент тензора инерции.

Для выполнения этого упражнения используется то же тело, что и в упр. 2. На поверхности всех тел, входящих в комплект установки, нанесены прямые, проходящие через точку, соответствующую его центру масс и повернутые относительно друг друга на  $15^\circ$ . За ось  $Ox$  системы координат, связанной с телом, следует принять направление одной из этих прямых.

#### Измерения

1. Определить четыре величины момента инерции тела  $J_1^{(1)}$ ,  $J_2^{(1)}$ ,  $J_3^{(1)}$ ,  $J_4^{(1)}$ , для случаев, когда выбранная ось  $Ox$ , соответственно, совпадает, перпендикулярна, составляет угол  $\alpha_0$ , и  $-\alpha_0$  с осью вращения ( $\alpha_0$  — произвольный угол, например,  $30^\circ$  или  $45^\circ$ ). Для выполнения этого пункта необходимо произвести измерения, аналогичные проведенным в упр. 2. Результаты занести в табл. 6.4.

2. Приняв за ось  $Ox$  другое направление, повторить все измерения п.1 и получить новые значения величин  $J_1^{(2)}$ ,  $J_2^{(2)}$ ,  $J_3^{(2)}$ ,  $J_4^{(2)}$ . Полученные результаты занести в таблицу, аналогичную табл. 6.4.

#### Обработка результатов

Воспользовавшись измеренными величинами  $J_1^{(i)}$ ,  $J_2^{(i)}$ ,  $J_3^{(i)}$ ,  $J_4^{(i)}$  и соотношениями (6.7)—(6.10), определить  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{xy}$  для двух систем координат, которые использовались в п.1 и п.2. Убедиться, что компоненты тензора инерции зависят от выбора системы координат и занести их в табл. 6.4, указать ориентацию системы координат, для которой они получены.

Таблица 6.4

Форма и размеры тела:									
		$N$	$t_n$	$n$	$\langle T \rangle$	$S_{\langle T \rangle}$	$J_i$	$S_{J_i}$	
1	Ось $Ox$ параллельна оси вращения	1							$J_{xx} =$
		2							
		3							
2	Ось $Ox$ перпендикулярна оси вращения	1							$J_{yy} =$
		2							
		3							
3	Ось $Ox$ составляет угол $\alpha_0$ с осью вращения								$J_{xy} =$
4	Ось $Ox$ составляет угол $-\alpha_0$ с осью вращения								
.....									

**Упражнение 4. Определение компонент тензора инерции тела, состоящего из стержней и шаров\*.**

Изучаемое тело представляет собой крестовину из стержней заданной массы и длины и шаров. Шары закрепляются на крестовине с помощью винтов. В упражнении по указанию преподавателя исследуется одна из трех

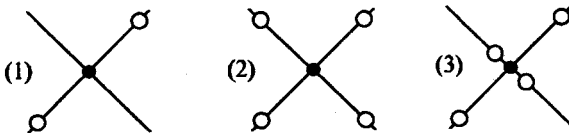


Рис. 26. Конфигурации тел, исследуемые в данной работе

конфигураций тел, показанных на рис. 26.

### Измерения

1. Закрепить тело в рамке. Измерить периоды колебаний маятника для нескольких заданных положений рамки, изменяя угол, определяющий ее положение относительно оси вращения на  $15^\circ$ , начиная от положения, при котором два шара находятся на одной вертикали (аналогично п.2 упражнения 2). Результаты измерений занести в табл. 6.5.

\* Данное упражнение выполняется по указанию преподавателя.

## Обработка результатов

1. Определить моменты инерции маятников относительно выбранной оси для всех рассмотренных случаев (аналогично п.2 упражнения 2).

2. Определить компоненты тензора инерции выбранного тела  $J_{xx}$ ,  $J_{yy}$ ,  $J_{xy}$  для системы координат, связанной со стержнями крестовины.

Таблица 6.5

Выбранная конфигурация системы тел:								
$\alpha_i$	$N$	$t_n$	$n$	$T_\alpha$ ( $T_d$ )	$S(T_d)$	$J_\alpha$	$\sqrt{\frac{1}{J_\alpha}}$	$\left(\sqrt{\frac{1}{J_\alpha}}\right)_{\text{теор}}$
	1							
	2							
	3							
	1							
	2							
	3							
	1							
	2							
	3							
.....								

3. Используя известные формулы для моментов инерции стержня и шара (см. Приложение), определить моменты инерции тела относительно вертикальной оси для использованных значений угла  $\alpha$ . Построить в

полярной системе координат сечения эллипсоидов инерции  $\sqrt{\frac{1}{J_\alpha}}$  и

$\left(\sqrt{\frac{1}{J_\alpha}}\right)_{\text{теор}}$  по найденным экспериментальным и теоретическим данным.

## Основные итоги работы

В результате выполнения работы должно быть экспериментально получено сечение эллипсоида инерции плоскостью  $xOy$  исследованного тела. Определены направления главных центральных осей инерции и определены компоненты тензора инерции для двух ориентаций осей  $Ox$  и  $Oy$ . Следует провести сравнение данных эксперимента с теорией. Для тела в виде крестовины для одного расположения системы координат должны быть определены экспериментально и теоретически компоненты тензора инерции, построены экспериментально и теоретически определенные сечения эллипсоидов инерции.

## Контрольные вопросы

1. Записать уравнение моментов и объяснить смысл входящих в него величин.

2. Какова связь между моментом импульса и угловой скоростью? Что такое тензор инерции?

3. Записать компоненты тензора инерции для простейших систем: тонкая палочка, система материальных точек.
4. Что такое главные оси? Что такое центральные оси? Примеры.
5. Как направлены вектора угловой скорости и момента количества движения тела вокруг закрепленной оси
  - 1) если ось вращения совпадает с одной из главных осей;
  - 2) если ось вращения не совпадает ни с одной из главных осей?
5. Связь между компонентами тензора инерции и моментом инерции относительно фиксированной оси.
6. Что такое эллипсоид инерции? Как с помощью эллипсоида инерции определить значение момента инерции тела относительно заданной оси?

### Литература

#### Основная:

1. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Том I. Механика, 3-изд., М.: Наука, 1989.

#### Дополнительная

1. *Петкевич В.В.* Теоретическая механика. М.: Наука, 1981, гл. VI, §1.
2. *Ольховский И.И.* Курс теоретической механики для физиков. М.: Из-во Моск. ун-та, 1974, §38.

# Π приложения

## ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ, ИМЕЮЩИХ ПРОСТЕЙШУЮ ГЕОМЕТРИЧЕСКУЮ ФОРМУ

При определении момента инерции тела произвольной формы относительно некоторой оси его обычно представляют в виде совокупности малых элементов, находят момент инерции каждого элемента относительно выбранной оси и затем проводят суммирование (или интегрирование) по всему объему тела. Если форма тела является правильной геометрической фигурой, то процесс вычисления величины момента инерции значительно упрощается, а иногда могут быть использованы некоторые специальные способы, которые на отдельных примерах будут рассмотрены ниже.

*Приложение 1.* Определение момента инерции тонкого стержня, относительно оси, проходящей через его середину. Пусть тонкий стержень имеет длину  $l$  и массу  $m$ . Разделим его на малые элементы длины  $dx$  (рис. 27), масса которых  $dm = \frac{m}{l} dx$ . Если выбранный элемент находится на расстоянии  $x$  от оси, то его момент инерции  $dJ = x^2 dm$ , т.е.

$$dJ = \frac{m}{l} x^2 dx.$$

Интегрируя последнее соотношение в пределах от 0 до  $\frac{l}{2}$  и удваивая полученное выражение (для учета левой половины стержня), получим

$$J = 2 \int_0^{l/2} \frac{m}{l} x^2 dx = 2 \frac{m}{l} \cdot \frac{x^3}{3} \Big|_0^{l/2} = \frac{ml^2}{12}. \quad (\text{п.1})$$

Это выражение может быть получено и другим способом, с помощью метода подобия. Будем считать, что рассматриваемый стержень состоит из двух половин (рис. 28). Каждая из них имеет массу  $\frac{m}{2}$  и длину  $\frac{l}{2}$ .

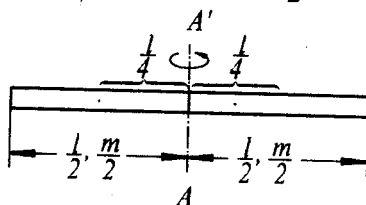
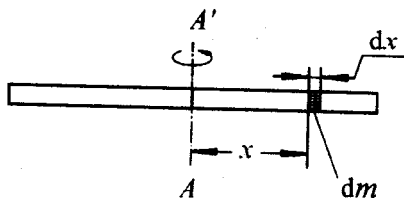


Рис. 27. Представление стержня, вращающегося вокруг оси, проходящей через его середину, в виде совокупности малых элементов  $dx$

Рис. 28. К определению момента инерции тонкого стержня относительно оси, проходящей через его середину, с помощью метода подобия



Выражение для момента инерции стержня должно включать его массу и длину, так как это единственные параметры, определяющие его инерционные свойства при вращении. Пусть

$$J = km l^2, \quad (\text{п.2})$$

где  $k$  — неизвестный коэффициент

Для каждой из половин стержня при вращении вокруг оси  $AA'$  можно найти момент инерции, используя (п.2) и теорему Гюйгенса—Штейнера.

$$J_1 = k \frac{m}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{l}{4} \right)^2. \quad (\text{п.3})$$

Полный момент инерции стержня

$$J = 2J_1 = 2 \left( k \frac{m}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 + \frac{m}{2} \left( \frac{l}{4} \right)^2 \right). \quad (\text{п.4})$$

Но этот же момент инерции, согласно (п.2), равен  $km l^2$ . Приравняв (п.4) и (п.2) имеем

$$2 k \frac{m}{2} \left( \frac{l}{2} \right)^2 + 2 \frac{m}{2} \left( \frac{l}{4} \right)^2 = km l^2, \quad (\text{п.5})$$

или  $\frac{k}{4} + \frac{1}{16} = k$  и, следовательно,

$$k = \frac{1}{12}, \quad (\text{п.6})$$

т. е.  $J = \frac{1}{12} m l^2$ , что совпадает с (п.1).

**Приложение 2.** Моменты инерции прямоугольной пластины относительно главных центральных осей. Для расчета моментов инерции прямоугольной пластинки со сторонами  $a$  и  $b$  и массой  $m$  выберем систему координат так, чтобы ее оси совпадали с главными центральными осями (рис. 29). Для прямоугольной пластинки легко вычислить моменты инерции относительно осей  $x$  и  $y$ . Рассмотрим, например, расчет  $J_x$ . Пластинку можно представить как совокупность тонких полосок, для каждой из которых момент инерции вычисляется так же, как для тонкой палочки длины  $a$ . Момент инерции пластинки относительно оси  $x$  равен сумме моментов инерции этих полосок, т.е.

$$J_x = \sum J_{x_i} = \sum \frac{1}{12} (dm) a^2 = \frac{1}{12} m a^2. \quad (\text{п.7})$$

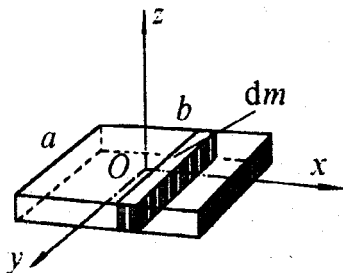


Рис. 29. Выбор системы координат и представление пластины в виде совокупности тонких полосок

Аналогично вычисляется момент инерции пластинки относительно оси  $y$

$$J_y = \frac{1}{12} mb^2. \quad (\text{п.8})$$

Для вычисления момента инерции пластинки относительно оси  $z$  воспользуемся следующим приемом. Рассмотрим малый элемент массы  $\delta m$  (рис. 30). Его момент инерции  $\delta J_z$  относительно оси  $z$  равен

$$\delta J_z = \delta m(x^2 + y^2), \quad (\text{п.9})$$

т. е. можно записать, что

$$\delta J_z = \delta mx^2 + \delta my^2 = \delta J_y + \delta J_x, \quad (\text{п.10})$$

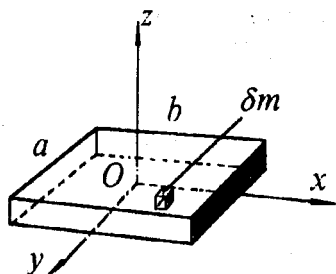


Рис. 30. Представление пластинки в виде набора малых элементов

где  $\delta J_y, \delta J_x$  — моменты инерции этого малого элемента относительно осей  $y$  и  $x$ .

Это же соотношение справедливо не только для отдельного элемента, но и для любого плоского тела в целом. В этом легко убедиться, представляя плоское тело как совокупность отдельных малых элементов (рис.30) и производя суммирование по всем этим элементам.

Таким образом, используя (п.7), (п.8) и (п.10), получим

$$J_z = \frac{1}{12} m(a^2 + b^2). \quad (\text{п.11})$$

**Приложение 3.** Момент инерции треугольной пластины относительно главной центральной оси, перпендикулярной его плоскости. Определим момент инерции треугольной пластины с помощью метода подобия. Этот метод используется обычно в тех случаях, когда изначально ясен общий вид формулы, определяющей момент инерции. В частности, если тело является правильной фигурой, например, квадратом, равносторонним треугольником, то в конечном выражение для момента инерции относительно оси, проходящей через центр масс и перпендикулярной плоскости фигуры, войдет масса тела и квадрат его характерного размера. Действительно — это единственные параметры, которые могут характеризовать инерционные свойства тела при его вращении вокруг выбранной оси. То есть можно записать

$$J = kma^2, \quad (\text{п.12})$$

где  $J$  — момент инерции тела,  $m$  — его масса,  $a$  — характерный размер (сторона квадрата или треугольника),  $k$  — неизвестный коэффициент, который определяется формой тела.

Для пластины в виде правильного треугольника  $A'B'C'$  (рис. 31) момент инерции относительно оси, перпендикулярной плоскости пластины и проходящей через точку  $O$ , может быть записан в виде (п.12).

Проведем геометрическое построение (рис. 31) и рассмотрим треугольную пластину  $ABC$  со стороной  $2a$ . Очевидно, что ее масса будет равна  $4m$ , а формула для момента инерции будет иметь вид

$$J_1 = k(4m) \cdot (2a)^2 = k \cdot 16 \cdot ma^2. \quad (\text{п.13})$$

Пластина  $ABC$  состоит из четырех одинаковых равносторонних треугольников со стороной  $a$  каждый. В этом случае момент инерции треугольника  $ABC$  можно представить в виде суммы моментов инерции четырех треугольных пластин. Для вычисления этих моментов инерции воспользуемся тем, что центр масс треугольника находится в точке пересечения его медиан. Обозначим через  $d$  расстояние от центров  $\triangle AA'C'$ ,  $\triangle A'B'B'$ ,  $\triangle B'C'C'$ , до точки  $O$  — центра масс пластины  $ABC$ . Используя теорему Гюйгенса — Штейнера, получаем

$$J_1 = (J_{AA'C'} + md^2) + (J_{A'B'B'} + md^2) + (J_{C'B'C} + md^2) + J_{A'B'C} = 4k \cdot ma^2 + 3md^2. \quad (\text{п.14})$$

Учитывая, что  $d = \frac{a}{\sqrt{3}}$  и сравнивая (п.14) с (п.13), находим, что

$$4kma^2 + 3m \frac{a^2}{3} = 16kma^2, \quad (\text{п.15})$$

откуда следует

$$k = \frac{1}{12}. \quad (\text{п.16})$$

То есть момент инерции плоского тела, имеющего форму равностороннего треугольника относительно оси, проходящей через центр масс (точку  $O$ ) перпендикулярно его плоскости, равен

$$J = \frac{1}{12} ma^2. \quad (\text{п.17})$$

**Приложение 4. Моменты инерции тонкого диска относительно его главных центральных осей.** Для расчета моментов инерции тонкого диска массы  $m$  и радиуса  $R$  выберем систему координат так, чтобы ее оси совпадали с главными центральными осями (рис. 32). Определим момент инерции тонкого однородного диска относительно оси  $z$ , перпендикулярной к плоскости диска. Рассмотрим бесконечно тонкое кольцо с внутренним радиусом  $r$  и наружным

$r + dr$ . Площадь такого кольца  $ds = 2\pi r dr$ , а его масса  $dm = \frac{m ds}{S} =$

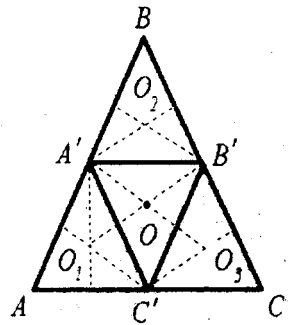


Рис. 31. Схематичное представление применения принципа подобия для определения момента инерции тела, имеющего форму равностороннего треугольника

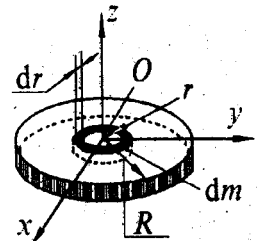


Рис. 32. Выбор системы координат и представление диска в виде набора тонких

$= 2m \frac{rdr}{R^2}$ , где  $S = \pi R^2$  — площадь всего диска. Момент инерции тонкого кольца найдется по формуле  $dJ = dm r^2$ . Момент инерции всего диска определяется интегралом

$$J_z = \int r^2 dm = \frac{2m}{R^2} \int_0^R r^3 dr = \frac{1}{2} m R^2. \quad (\text{п.18})$$

Для определения  $J_x$  воспользуемся симметрией диска ( $J_x = J_y$ ) и утверждением (п.10), полученным при расчете момента инерции прямоугольной пластины. При этом из (п.10) получаем

$$J_z = 2J_x. \quad (\text{п.19})$$

Откуда

$$J_x = J_y = \frac{1}{4} m R^2. \quad (\text{п.20})$$

**Приложение 5.** Моменты инерции цилиндра относительно его главных центральных осей. Выберем оси системы координат, совпадающие с главными центральными осями так, как показано на рис. 33. Определим момент инерции цилиндра относительно оси  $z$ . Цилиндр представим как набор тонких дисков с массами  $dm$  и моментами инерции  $dJ_z = \frac{1}{2} dm R^2$ . Момент инерции цилиндра равен сумме моментов инерции  $dJ_z$  тонких дисков

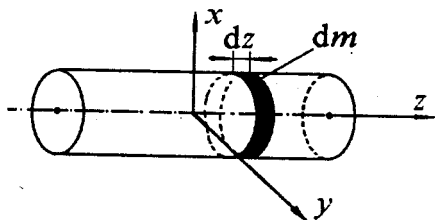


Рис. 33. Выбор системы координат и представление цилиндра в виде набора тонких дисков

$$J_z = \sum dJ_z = \frac{1}{2} m R^2,$$

где  $R$  — радиус цилиндра,  $m$  — его масса.

Пусть теперь ось вращения проходит через центр масс цилиндра перпендикулярно его продольной оси (рис. 33) и совпадает с осью координат  $x$ . Представим цилиндр как совокупность тонких дисков толщиной  $dz$ , массой  $dm = \frac{m}{l} \cdot dz$  ( $l$  — длина цилиндра). Момент инерции тонкого диска относительно оси  $Ox$   $dJ'_x$  в соответствии с (п.20) и теоремой Гюйгенса—Штейнера равен

$$dJ'_x = \frac{1}{4} dm R^2 + dm z^2, \quad (\text{п.22})$$

где  $z$  — расстояние от диска до центра цилиндра.

Момент инерции всего цилиндра найдем после интегрирования по  $z$  (по всей длине цилиндра)

$$J_x = \int_{-\frac{l}{2}}^{\frac{l}{2}} z^2 \frac{2m}{l} dz + \frac{1}{4} m R^2. \quad (\text{п.23})$$

Откуда получаем

$$J_x = \frac{1}{12} m l^2 + \frac{1}{4} m R^2. \quad (\text{П.24})$$

**Приложение 6.** Момент инерции цилиндра с центральным отверстием, относительно его продольной оси. Однородный цилиндр массы  $m$  с внешним радиусом  $R_2$  и внутренним радиусом  $R_1$  (рис. 34) можно рассматривать как сплошной цилиндр радиуса  $R_2$ , массы  $m_2$ , из которого вырезано отверстие — цилиндр радиуса  $R_1$ , массы  $m_1$ . Очевидно, что

$$J = J_2 - J_1 = \frac{1}{2} (m_2 R_2^2 - m_1 R_1^2) \text{ и, так как } m = m_2 - m_1, \text{ и } \frac{m_1}{m_2} = \frac{\pi R_1^2}{\pi R_2^2}, \text{ то}$$

$$J = \frac{1}{2} m (R_2^2 + R_1^2). \quad (\text{п.25})$$

**Приложение 7.** Момент инерции шара. Сплошной шар массы  $m$  и радиуса  $R$  можно рассматривать как совокупность бесконечно тонких сферических слоев с массами  $dm$ , радиусом  $r$ , толщиной  $dr$  (рис. 35).

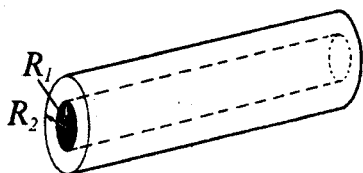


Рис. 34. Схематическое представление цилиндра с центральным отверстием

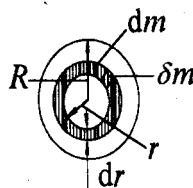


Рис. 35. Схематическое представление шара как совокупности сферических слоев

Рассмотрим малый элемент сферического слоя  $\delta m$  с координатами  $x, y, z$ . Его моменты инерции относительно осей  $x, y, z$ , проходящих через центр слоя —  $\delta J_x, \delta J_y, \delta J_z$ , равны

$$\delta J_x = \delta m (y^2 + z^2), \quad \delta J_y = \delta m (x^2 + z^2), \quad \delta J_z = \delta m (x^2 + y^2).$$

Т. е. можно записать

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = 2 \delta m (x^2 + y^2 + z^2). \quad (\text{п.26})$$

Так как для элементов сферического слоя  $x^2 + y^2 + z^2 = r^2$ , то

$$\delta J_x + \delta J_y + \delta J_z = 2 \delta m r^2.$$

После интегрирования по всему объему слоя получим

$$dJ_x + dJ_y + dJ_z = 2 dm r^2. \quad (\text{п.27})$$

Так как, в силу симметрии для сферического слоя  $dJ_x = dJ_y = dJ_z = dJ$ , а  $dm = m \frac{dV}{V} = m \frac{4\pi r^2 dr}{\frac{4}{3}\pi R^3}$ , то

$$dJ = \frac{2}{3} dm r^2 = 2m \frac{r^4}{R^3} dr.$$

Интегрируя по всему объему шара, получаем

$$J = \int dJ = \int_0^R 2m \frac{r^4}{R^3} dr.$$

Окончательно (после интегрирования) получим, что момент инерции шара относительно оси, проходящей через центр, равен

$$J = \frac{2}{5} m R^2. \quad (\text{п.28})$$

**Приложение 8.** Моменты инерции параллелепипеда со сторонами  $a$ ,  $b$  и  $c$  относительно его главных осей. Выберем оси системы координат ( $x$ ,  $y$ ,  $z$ ) совпадающими с главными центральными осями. Начало системы координат совпадает с центром параллелепипеда. Для определения момента инерции относительно оси  $Ox$  представим параллелепипед как совокупность тонких прямоугольных пластинок (рис. 36) массой  $dm = \frac{m}{c} dy$  и толщиной  $dy$ . Момент инерции  $dJ'_x$  каждой такой пластинки относительно оси  $Ox$  в соответствии с (п.7) и теоремой Гюйгенса—Штейнера равен

$$dJ'_x = \frac{1}{12} dm b^2 + y^2 \cdot dm. \quad (\text{п.29})$$

Момент инерции всего параллелепипеда получим, интегрируя по всему объему

$$J_x = \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{1}{12} (b^2) \frac{m}{c} dy + \int_{-\frac{c}{2}}^{\frac{c}{2}} \frac{m}{c} y^2 dm = \frac{1}{12} m (b^2 + c^2). \quad (\text{п.30})$$

Аналогично вычисляются моменты инерции относительно осей  $y$  и  $z$ :

$$J_y = \frac{1}{12} m (a^2 + b^2), \quad (\text{п.31})$$

$$J_z = \frac{1}{12} m (a^2 + c^2). \quad (\text{п.32})$$

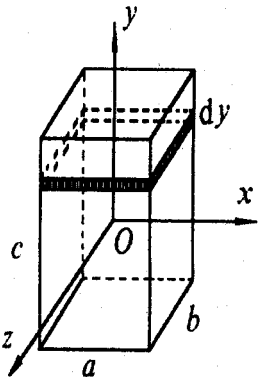


Рис. 36. Выбор системы координат и представление параллелепипеда в виде тонких прямоугольных пластинок

Приложение 9. Моменты инерции равнобедренной треугольной призмы относительно ее главных осей. Рассмотрим предварительно моменты инерции тонкой равнобедренной треугольной пластины  $HPQ$  (рис. 37) массы  $m_1$  относительно ее главных осей. Центр пластины лежит на пересечении медиан, причем  $OG = \frac{1}{3}QG = \frac{1}{3}h$  ( $h$  — высота треугольника).

Главные центральные оси  $O_1O'_1$  и  $O_2O'_2$  такой пластины расположены так, как показано на рис. 37 ( $O_3O'_3$  проходит через точку  $O$  перпендикулярно плоскости пластины). Для удобства интегрирования введем систему координат  $x', y', z'$  с началом в точке  $Q$ , так что  $Qz'$  перпендикулярна плоскости пластины, а оси  $Qx'$  и  $Qy'$  лежат в плоскости пластины и ось  $Ox'$  перпендикулярна высоте треугольника. Представим пластину как набор тонких полосок толщиной  $dy$ , с массами  $dm$  и длинами  $l(y)$ , причем

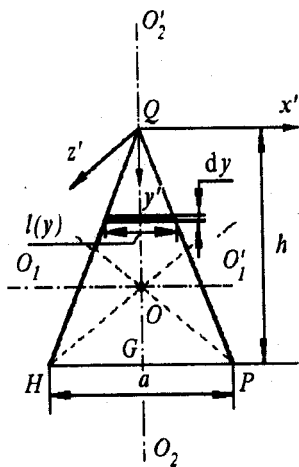


Рис. 37. Выбор системы координат и представление пластины в виде тонких полосок

$$l(y) = \frac{a}{h} \cdot y, \quad (a \text{ — основание треугольника})$$

$$dm = \frac{m_1}{h \cdot a} \cdot dy \cdot l(y) = \frac{m_1}{h \cdot a} \cdot dy \cdot \frac{a}{h} \cdot y = \frac{2m_1}{h^2} \cdot y \cdot dy. \quad (\text{п.33})$$

Момент инерции  $dJ_y$  каждой такой полоски относительно оси  $O_2O'_2$  (совпадающей с осью  $y'$ ) равен (см. п.1)

$$dJ_y = \frac{1}{12} dm \cdot l^2(y) = \frac{1}{12} \frac{2m_1}{h^2} \cdot y dy \cdot \left(\frac{a}{h} y\right)^2 = \frac{1}{6} \cdot \frac{m_1 \cdot a^2}{h^4} \cdot y^3 \cdot dy. \quad (\text{п.34})$$

Полный момент инерции пластины  $J_2$  относительно оси  $O_2O'_2$  получаем после интегрирования

$$J_2 = \int_0^h \frac{1}{6} \frac{m_1 a^2}{h^4} \cdot y^3 \cdot dy = \frac{1}{6} \frac{m_1 \cdot a^2}{h^4} \cdot \frac{1}{4} \cdot y^4 \Big|_0^h = \frac{1}{24} m_1 a^2. \quad (\text{п.35})$$

Момент инерции  $dJ'_x$  каждой полоски относительно оси  $x'$  равен

$$dJ'_x = dm \cdot y^2 = \frac{2m_1}{h^2} \cdot y^3 \cdot dy. \quad (\text{п.36})$$

Для всей пластины

$$J'_x = \int_0^h \frac{2m_1}{h^2} \cdot y^3 \cdot dy = \frac{m_1}{2} \cdot h^2. \quad (\text{п.37})$$

Момент инерции  $J_1$  относительно главной оси  $O_1O'_1$  связан с  $J'_x$  с помощью соотношения (теорема Гюйгенса—Штейнера)

$$J'_x = J_1 + m_1 \left( \frac{2}{3}h \right)^2, \quad (\text{п.38})$$

откуда получаем

$$J_1 = J'_x - m_1 \left( \frac{2}{3}h \right)^2 = m_1 \cdot h^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{4}{9} \right) = \frac{1}{18}m_1 \cdot h^2. \quad (\text{п.39})$$

Для определения момента инерции пластины относительно оси  $O_3O'_3$ , перпендикулярной плоскости пластины, воспользуемся соотношением (п.10), верным для плоских тел

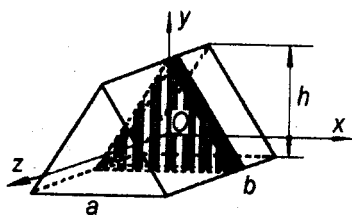
$$J_3 = J_1 + J_2, \quad (\text{п.40})$$

т.е.

$$J_3 = \frac{1}{24}m_1 \cdot a^2 + \frac{1}{18}m_1 \cdot h^2 = \frac{1}{6}m_1 \left( \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}h^2 \right). \quad (\text{п.41})$$

Очевидно, что для пластины в форме плоского равностороннего треугольника, когда  $h = a \cdot \frac{\sqrt{3}}{2}$ , выражение (п.41) совпадает с (п.17), полученным более простым способом.

При определении моментов инерции равнобедренной призмы толщиной  $b$  и массой  $m$  представим ее как набор тонких треугольных пластин с



массами  $dm_1 = \frac{m}{b} \cdot dz$ . Систему координат выберем так, чтобы оси  $x$ ,  $y$ ,  $z$  совпадали с главными центральными осями призмы (см. рис. 38). Момент инерции призмы относительно оси  $Oz$  равен сумме моментов инерции отдельных пластин

Рис. 38. Выбор системы координат и представление равнобедренной призмы в виде тонких треугольных пластин

$$J_z = \frac{1}{6}m \left( \frac{1}{4}a^2 + \frac{1}{3}h^2 \right). \quad (\text{п.42})$$

Получим теперь выражения для  $J_x$  и  $J_y$ . Момент инерции отдельной пластины  $J'_1$  относительно оси  $Ox$  в соответствии с (п.39) и теоремой Гюйгенса—Штейнера равен

$$dJ'_1 = dJ_1 + dm_1 \cdot z^2 = \frac{1}{18}dm_1 h^2 + dm_1 z^2 = \frac{1}{18} \frac{m}{b} h^2 dz + \frac{m}{b} z^2 dz. \quad (\text{п.43})$$

Интегрируя по всей высоте призмы, получаем момент инерции  $J_x$  относительно  $Ox$



$$J_x = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{1}{18} m_1 h^2 + \frac{m_1}{b} z^2 \right) dz = \frac{1}{18} m_1 h^2 + \frac{1}{3} \frac{m_1}{b} z^3 \Big|_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} = \frac{1}{18} m_1 h^2 + \frac{1}{12} m_1 b^2. \quad (\text{п.44})$$

Для оси  $Oy$  имеем

$$J_{2'} = \frac{1}{24} m_1 a^2 + m_1 z^2 = \frac{1}{24} m_1 a^2 dz + \frac{m_1}{b} z^2 dz, \quad (\text{п.45})$$

откуда

$$J_y = \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \left( \frac{1}{24} m_1 a^2 + \frac{m_1}{b} z^2 \right) dz = \frac{1}{24} m_1 a^2 + \frac{1}{12} m_1 b^2. \quad (\text{п.46})$$

**Приложение 10.** Моменты инерции полудиска относительно его главных центральных осей. Определим предварительно моменты инерции для тонкой полукруглой пластины, имеющей массу  $m_1$  (рис. 39).

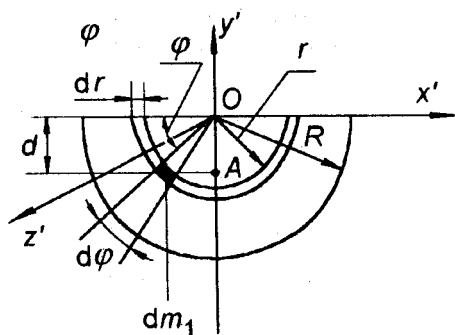


Рис. 39. Выбор системы координат для определения момента инерции

Найдем положение центра масс (т. А) этого тела, то есть расстояние  $d$ . По определению центра масс имеем

$$d = \frac{\int dm_1 (r \sin \varphi)}{m_1} = \frac{1}{\frac{\pi R^2}{2}} \int_0^{\pi} \int_0^R r dr d\varphi r \sin \varphi =$$

$$= \left( -\frac{2}{\pi R^2} \cdot \frac{1}{3} \cdot r^3 \Big|_0^R \right) \cdot \cos \varphi \Big|_0^{\pi} = \frac{4}{3\pi} R. \quad (\text{п.47})$$

Выберем декартову систему координат  $x', y', z'$  с центром в точке  $O$  (рис. 39). Проводя прямое интегрирование так же, как для диска и учитывая, что  $J'_{x'} = J'_{y'}$ , получаем

$$J'_x = \frac{1}{4} m_1 R^2, \quad (\text{п.48})$$

$$J'_y = \frac{1}{4} m_1 R^2, \quad (\text{п.49})$$

$$J'_z = \frac{1}{2} m_1 R^2. \quad (\text{п.50})$$

Моменты инерции относительно главных центральных осей получаем, используя теорему Гюйгенса—Штейнера.

$$J_{1x} = J'_x - m_1 d^2 = m_1 R^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right), \quad (\text{п.51})$$

$$J_{1y} = J'_y = \frac{1}{4} m_1 R^2, \quad (\text{п.52})$$

$$J_{1z} = J_{1x} + J_{1y} = m_1 R^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right). \quad (\text{п.53})$$

При рассмотрении моментов инерции полудиска массы  $m$ , радиуса  $R$  и толщины  $b$  представим его в виде набора тонких пластин так, как показано на рис. 40

Систему координат выберем так, чтобы ее центр совпадал с центром масс полудиска, а направления осей координат — с направлениями соответствующих главных центральных осей.

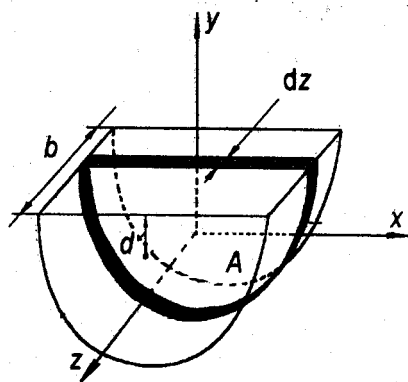


Рис. 40. Выбор системы координат и представление полудиска толщины  $b$  в виде тонких полукруглых пластин

Моменты инерции  $dJ_x$ ,  $dJ_y$ ,  $dJ_z$  таких пластин с массами  $dm_1 = \frac{M}{b} dz$ , относительно осей  $Ox$ ,  $Oy$  и  $Oz$  получаем на основании (п.51)—(п.53) и теоремы Гюйгенса—Штейнера:

$$dJ_x = dm_1 R^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + dm_1 z^2, \quad (\text{п.54})$$

$$dJ_y = \frac{1}{4} dm_1 R^2 + dm_1 z^2, \quad (\text{п.55})$$

$$dJ_z = dm_1 R^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right), \quad (\text{п.56})$$

где  $z$  — расстояние пластины от центра масс полудиска.

Выражения для моментов инерции полудиска получаем после интегрирования по всему объему

$$J_x = mR^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} \frac{m}{b} z^2 dz = mR^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \frac{1}{12} mb^2, \quad (\text{п.57})$$

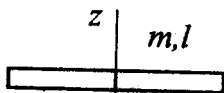
$$J_y = \frac{1}{4} mR^2 + \int_{-\frac{b}{2}}^{\frac{b}{2}} 2 \frac{m}{b} z^2 dz = \frac{1}{4} mR^2 + \frac{1}{12} mb^2, \quad (\text{п.58})$$

$$J_z = mR^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right). \quad (\text{п.59})$$

Приложение 11. Моменты инерции тел, рассмотренных в приложении (относительно оей, указанных на рисунках).

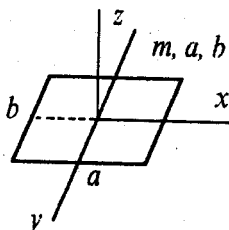
Форма тела	Моменты инерции
------------	-----------------

Тонкий однородный стержень



$$J = \frac{ml^2}{12}$$

Тонкая прямоугольная пластинка

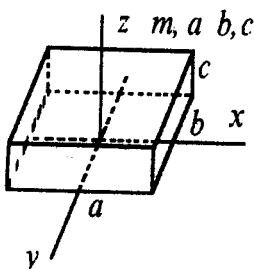


$$J_x = \frac{mb^2}{12}$$

$$J_y = \frac{ma^2}{12}$$

$$J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$$

Параллелепипед

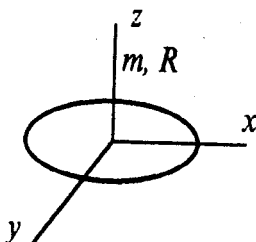


$$J_x = \frac{m(b^2 + c^2)}{12}$$

$$J_y = \frac{m(a^2 + c^2)}{12}$$

$$J_z = \frac{m(a^2 + b^2)}{12}$$

Тонкий диск

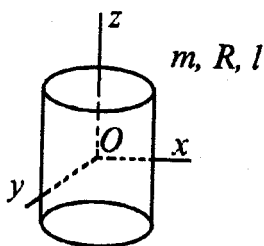


$$J_x = \frac{1}{4}mR^2$$

$$J_y = \frac{1}{4}mR^2$$

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2$$

Цилиндр



$$J_x = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$$

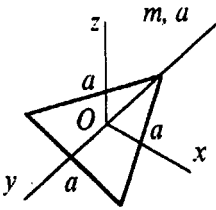
$$J_y = \frac{ml^2}{12} + \frac{mR^2}{4}$$

$$J_z = \frac{1}{2}mR^2$$

Форма тела

Моменты инерции

Плоский треугольник

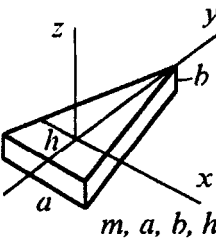


$$J_x = \frac{ma^2}{24}$$

$$J_y = \frac{ma^2}{24}$$

$$J_z = \frac{ma^2}{12}$$

Треугольная призма

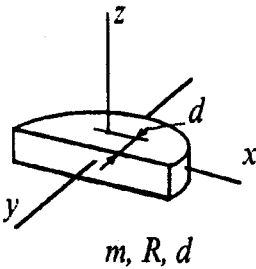


$$J_x = \frac{mh^2}{18} + \frac{mb^2}{12}$$

$$J_y = \frac{ma^2}{24} + \frac{mb^2}{12}$$

$$J_z = \frac{ma^2}{24} + \frac{mh^2}{18}$$

Полудиск

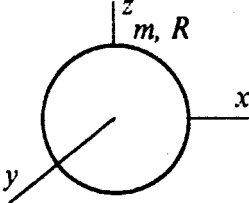


$$J_x = mR^2 \left( \frac{1}{4} - \frac{16}{9\pi^2} \right) + \frac{1}{12}mb^2$$

$$J_y = \frac{1}{4}mR^2 + \frac{1}{12}mb^2$$

$$J_z = mR^2 \left( \frac{1}{2} - \frac{16}{9\pi^2} \right)$$

Шар



$$J_x = J_y = J_z = \frac{2}{5}mR^2$$

Литература

1. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1989. §53.
2. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986.

Учебное издание

*САЛЕЦКИЙ Александр Михайлович*  
*СЛЕПКОВ Александр Иванович*

**МЕХАНИКА ТВЕРДОГО ТЕЛА. ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ**  
**(Университетский курс общей физики)**

ЛР №021293 от 18.06.98

Подписано в печать 14.06.99 Формат 70×108<sup>1</sup>/<sub>16</sub>  
Печать офсетная Бумага газетная Печ. л. 5,25  
Тираж 1000 экз. Зак. 2076

Изд-во физического факультета МГУ.  
119899 Москва, Ленинские горы, МГУ, физический факультет.  
Тел. (095)939-5494

Отпечатано в Производственно-издательском комбинате ВИНТИ.  
140010, Люберцы, Октябрьский пр-т, 403. Тел. 554-2186.