

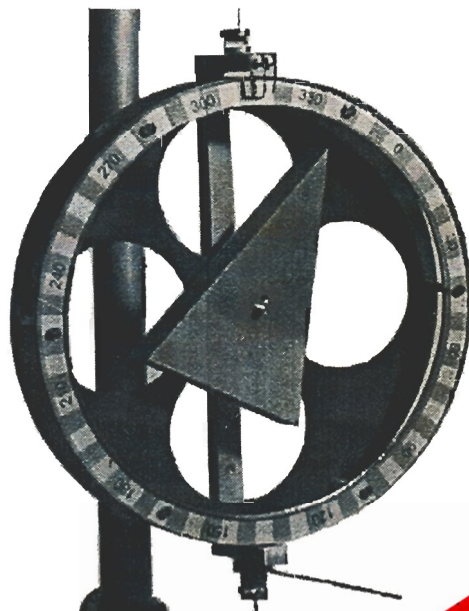


УНИВЕРСИТЕТСКИЙ КУРС
ОБЩЕЙ ФИЗИКИ

А.М. Салецкий, А.И. Сленков

**У
К
О
Ф**

**МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА**



**ЛАБОРАТОРНЫЙ
ПРАКТИКУМ**



Университетский курс
общей физики

А.М. Салецкий, А.И. Слепков

МЕХАНИКА
ТВЕРДОГО ТЕЛА
ЛАБОРАТОРНЫЙ ПРАКТИКУМ

МОСКВА
ФИЗИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ МГУ
1999

УДК 530.10
ББК 22.3

Рецензенты:

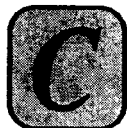
канд. физ.-мат. наук М.В. Семенов,
канд. физ.-мат. наук А.П. Штыркова

САЛЕЦКИЙ А.М., СЛЕПКОВ А.И. Механика твердого тела. Лабораторный практикум. (Университетский курс общей физики).—М.: Изд-во физического факультета МГУ, 1999.—84 с.

В учебное пособие включены описания лабораторных работ лаборатории твердого тела раздела «Механика» общего физического практикума физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Описание каждой практической работы содержит краткое теоретическое введение, описание экспериментальной установки и порядок выполнения упражнений.

Для студентов физических специальностей университетов.

- © Салецкий А.М., Слепков А.И., 1999
- © Виноградов М.П. (обложка), 1999
- © Физический факультет МГУ, 1999



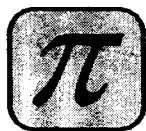
Содержание

Предисловие	6
Введение	7
Кинематика твердого тела	7
Уравнение моментов. Момент инерции относительно закрепленной оси	8
Тензор инерции	10
Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции	12
Литература	14
Работа 1. Изучение вращательного движения твердого тела	15
Цель работы	15
Идея эксперимента	15
Теория	15
Экспериментальная установка	17
Проведение эксперимента	17
Упражнение 1. Проверка закона движения	17
Упражнение 2. Проверка независимости инерционных свойств маятника (момента инерции) от момента внешних сил	19
Упражнение 3. Проверка основного уравнения вращательного движения для различных моментов инерции	21
Основные итоги работы	23
Контрольные вопросы	23
Литература	23
Работа 2. Определение момента инерции и проверка теоремы Гюйгенса—Штейнера методом крутильных колебаний	24
Цель работы	24
Идея эксперимента	24
Теория	24
Экспериментальная установка	26
Проведение эксперимента	27
Упражнение 1. Проверка теоремы Гюйгенса—Штейнера	27
Упражнение 2. Определение момента инерции тела методом колебаний	28
Основные итоги работы	29
Контрольные вопросы	30
Литература	30

Работа 3. Определение момента инерции тел простой формы . . .	31
Цель работы	31
Идея эксперимента	31
Теория	31
Экспериментальная установка	33
Проведение эксперимента	34
Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины и момента инерции тела маятника	34
Упражнение 2. Определение моментов инерции тел простой формы	35
Основные итоги работы	37
Контрольные вопросы	37
Литература	37
Работа 4. Определение момента инерции колеса	38
Цель работы	38
Идея эксперимента	38
Теория	38
Экспериментальная установка	41
Проведение эксперимента	43
Упражнение 1. Определение момента инерции колеса методом колебаний	43
Упражнение 2. Определение момента инерции колеса методом вращения	44
Упражнение 3. Прямой расчет момента инерции колеса	44
Основные итоги работы	46
Контрольные вопросы	46
Литература	46
Работа 5. Изучение тензора инерции твердого тела	47
Цель работы	47
Идея эксперимента	47
Теория	47
Экспериментальная установка	48
Проведение эксперимента	50
Упражнение 1. Изучение тензора инерции динамическим методом	50
Упражнение 2. Изучение тензора инерции методом колебаний	54
Основные итоги работы	58
Контрольные вопросы	58
Литература	58
Работа 6. Определение тензора инерции твердого тела	59
Цель работы	59
Идея эксперимента	59
Теория	59
Экспериментальная установка	63

Проведение эксперимента	63
Упражнение 1. Определение коэффициента упругости подвеса и момента инерции пустой рамки	63
Упражнение 2. Определение сечения эллипсоида инерции	65
Упражнение 3. Определение компонент тензора инерции	66
Упражнение 4. Определение компонент тензора инерции тела, состоящего из стержней и шаров	67
Основные итоги работы	68
Контрольные вопросы	68
Литература	69

Приложения. Определение моментов инерции тел, имеющих простейшую геометрическую форму	70
Приложение 1. Определение момента инерции тонкого стержня, относительно оси, проходящей через его середину	70
Приложение 2. Моменты инерции прямоугольной пластины относительно главных центральных осей	71
Приложение 3. Момент инерции треугольной пластины относительно главной центральной оси, перпендикулярной его плоскости	72
Приложение 4. Моменты инерции тонкого диска относительно его главных центральных осей	73
Приложение 5. Моменты инерции цилиндра относительно его главных центральных осей	74
Приложение 6. Момент инерции цилиндра с центральным отверстием, относительно его продольной оси	75
Приложение 7. Момент инерции шара	75
Приложение 8. Моменты инерции параллелепипеда со сторонами a , b и c относительно его главных осей	76
Приложение 9. Моменты инерции равнобедренной треугольной призмы относительно ее главных осей	77
Приложение 10. Моменты инерции полудиска относительно его главных центральных осей	79
Приложение 11. Моменты инерции тел, рассмотренных в приложении	82
Литература	83



Предисловие

Настоящее пособие содержит описания работ лаборатории динамики твердого тела раздела "Механика" практикума по общей физике физического факультета МГУ им. М.В. Ломоносова. Подбор лабораторных работ соответствует программе курса общей физики и является логическим продолжением соответствующего теоретического курса, читаемого на физическом факультете МГУ и содержащемся в учебном пособии В.А. Алешкевича, Л.Г. Деденко, В.А. Караваева "Механика твердого тела. Лекции".

Стиль описания работ отличается от принятого в предыдущих изданиях. Во-первых, авторы стремились к тому, чтобы материалы пособия были достаточны для самостоятельной подготовки к выполнению работ. В связи с этим в пособии имеется как общее теоретическое введение, так и более подробное изложение теории к каждой лабораторной работе. Во-вторых, в каждой работе сформулированы цель и идея эксперимента, дано описание установки и подробное изложение последовательности проведения эксперимента и обработки результатов. В конце работы в разделе «Основные итоги работы» перечислены основные физические результаты, которые должны быть получены и проанализированы студентом.

По объему отдельные задачи не одинаковы. На большинстве установок можно осуществить целый ряд опытов, выполнить которые за одно занятие затруднительно. В этих случаях преподаватель имеет возможность определить необходимый объем работы каждого студента. Прежде всего это замечание относится к работам 5 и 6. В работе 5 рекомендуется за одно занятие выполнить одно из двух упражнений. В работе 6 оптимальным, по-видимому, является выполнение трех упражнений из четырех.

В постановке и модернизации отдельных работ совместно с авторами пособия принимали участие Е.И. Васильев (задача 6), А.В. Червяков (создание, изготовление и наладка электронных схем), Р.Н. Лазаренко, О.И. Старостина (наладка экспериментального оборудования).

Авторы выражают благодарность В.А. Алешкевичу, по инициативе и при непосредственной поддержке которого осуществлялась данная работа, Е.И. Васильеву, В.Ю. Иванову, В.А. Караваеву, А.С. Нифанову, А.А. Якуте и другим сотрудникам кафедры, внимательно прочитавшим рукопись и сделавшим ряд важных замечаний. Мы выражаем искреннюю признательность М.В. Семенову и А.П. Штырковой, вложившим свой труд в неформальное рецензирование пособия, способствующее существенному его улучшению.

*А.М. Салецкий
А.И. Сленков*

Введение

Изучение движения твердого тела проводится в предположении, что тело является *абсолютно твердым*. Это означает, что расстояние между двумя любыми точками не изменяется со временем, т.е. твердое тело не деформируется. В дальнейшем мы будем вместо термина “абсолютно твердое тело” использовать термин “твердое тело”.

Кинематика твердого тела. Любое произвольное движение твердого тела можно представить как суперпозицию *поступательного и вращательного* движений. *Поступательным* называется такое движение, когда все точки тела движутся по одинаковым траекториям. В этом случае скорости всех точек тела в любой момент времени одинаковы, и его движение можно характеризовать движением одной лишь точки тела. Анализ такого движения производится по законам, справедливым для движения материальной точки.

Вращательным движением относительно оси называется такое движение, при котором траектории всех точек тела являются концентрическими окружностями с центрами, лежащими на одной прямой, называемой *осью вращения*. При вращении твердого тела проекция радиуса-вектора каждой его точки на плоскость, перпендикулярную оси вращения, за малый промежуток времени dt поворачивается на один и тот же угол $d\vec{\varphi}$. Здесь $d\vec{\varphi}$ — вектор, длина которого равна углу поворота $d\varphi$, а направление определяется в соответствии с правилом правого винта и совпадает с осью вращения.

Скорость изменения угла

$$\vec{\omega} = \frac{d\vec{\varphi}}{dt} \quad (\text{B.1})$$

называется *угловой скоростью* и, так же как $d\vec{\varphi}$, является вектором.

Угловая скорость связана с линейной скоростью любой точки тела \vec{v}_i соотношением

$$\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i, \quad (\text{B.2})$$

где \vec{r}_i — радиус-вектор любой указанной точки.

Изменение $\vec{\omega}$ со временем определяется величиной *углового ускорения*

$$\vec{\varepsilon} = \frac{d\vec{\omega}}{dt}. \quad (\text{B.3})$$

Свяжем начало системы координат, движущейся поступательно, с какой-либо точкой A твердого тела (точкой отсчета). Тогда скорость любой другой точки B тела можно представить как векторную сумму скорости движения системы координат \vec{v}_0 (скорость точки A) и \vec{v}' — относительной скорости точки B :

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{v}'. \quad (\text{B.4})$$

В качестве точки отсчета может быть выбрана любая точка твердого тела или пространства (если положение этой точки относительно твердого тела не меняется со временем), поэтому и разложение (В.4) будет неоднозначным. Однако, угол поворота $d\vec{\varphi}$ за малый промежуток времени dt не зависит от выбора точки отсчета и является одинаковым для всех точек твердого тела.

С учетом (В.2) выражение (В.4) может быть представлено в следующем виде

$$\vec{v} = \vec{v}_0 + \vec{\omega} \times \vec{r}, \quad (\text{В.5})$$

где $\vec{\omega}$ — угловая скорость вращения твердого тела (не зависящая от выбора точки отсчета), \vec{r} — радиус-вектор, начало которого лежит в точке А. Поступательная скорость тела \vec{v}_0 зависит от выбора точки отсчета. В частности, точку А можно выбрать таким образом, чтобы \vec{v}_0 было равно нулю. Для плоского движения твердого тела* в этом случае ось вращения, проходящая через точку А, является *мгновенной осью вращения***. Плоское движение твердого тела в каждый момент времени может быть представлено как вращательное движение вокруг некоторой мгновенной оси.

Уравнение моментов. Момент инерции относительно закрепленной оси. Рассмотрим твердое тело как систему жестко связанных между собой материальных точек. Уравнение движения для i -й материальной точки массы m_i в лабораторной системе координат имеет вид:

$$m_i \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{f}_{ij}, \quad (\text{В.6})$$

где \vec{F}_i — сумма всех внешних сил, действующих на i -ю материальную точку, \vec{f}_{ij} — сила, действующая на i -ю материальную точку со стороны j -й материальной точки, т.е. внутренняя сила. Будем полагать, что силы взаимодействия являются центральными, то есть векторы \vec{f}_{ij} и $(\vec{r}_i - \vec{r}_j)$ коллинеарны.

Умножим обе части уравнения движения (В.6) векторно на радиус-вектор \vec{r}_i

$$m_i \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} = \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}. \quad (\text{В.7})$$

С учетом того, что $\frac{d}{dt}(\vec{r}_i \times \vec{v}_i) = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt} + \frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i = \vec{r}_i \times \frac{d\vec{v}_i}{dt}$ (так как $\frac{d\vec{r}_i}{dt} = \vec{v}_i$, то $\frac{d\vec{r}_i}{dt} \times \vec{v}_i = 0$), после суммирования по всем точкам системы получим

*Плоским движением твердого тела называется движение, при котором траектории всех его точек лежат в параллельных плоскостях.

**Мгновенная ось вращения твердого тела — ось, относительно которой поступательная скорость тела в данный момент времени равна нулю.

$$\frac{d}{dt} \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i + \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}. \quad (\text{B.8})$$

Величина $\vec{L} = \sum_i m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{p}_i$ (\vec{p}_i — импульс i -й материальной точки) называется *моментом импульса* системы относительно некоторой неподвижной точки, выбранной за начало координат; $\vec{M} = \sum_i \vec{r}_i \times \vec{F}_i$ — *момент внешних сил* относительно той же точки; величина $\sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}$ является моментом всех внутренних сил. Выражение для момента внутренних сил можно преобразовать:

$$\begin{aligned} \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij} &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\vec{r}_j \times \vec{f}_{ji} + \vec{r}_i \times \vec{f}_{ij}) = \\ &= \frac{1}{2} \sum_i \sum_{j \neq i} (\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij}. \end{aligned} \quad (\text{B.9})$$

Заметим, что для центральных сил $(\vec{r}_i - \vec{r}_j) \times \vec{f}_{ij} = 0$. Тогда с учетом введенных выше обозначений уравнение (B.8) записывается в следующем виде:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}. \quad (\text{B.10})$$

Это уравнение называется *уравнением моментов*.

Если твердое тело вращается вокруг закрепленной оси, то векторное уравнение (B.10) сводится к скалярному уравнению. В частности, если ось вращения совпадает с осью координат z , то

$$\frac{dL_z}{dt} = M_z, \quad (\text{B.11})$$

где L_z , M_z — проекции \vec{L} и \vec{M} на ось z .

При вращении твердого тела вокруг неподвижной оси z с угловой скоростью ω скорость каждой материальной точки m_i тела будет равна $v_i = \omega \cdot \rho_i$, где ρ_i — ее расстояние до оси z . Проекция моментов импульса на ось z для этих точек будут равны $L_{iz} = \rho_i m_i v_i = \omega m_i \rho_i^2$. Так как ω одинакова для всех точек твердого тела, то момент импульса всего тела относительно оси z равен

$$L_z = \sum_i L_{iz} = \omega \sum_i m_i \rho_i^2 = \omega J. \quad (\text{B.12})$$

Величину

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2 \quad (\text{B.13})$$

называют моментом инерции тела относительно закрепленной оси. Момент инерции является мерой инертности тела при вращательном движении относительно закрепленной оси.

Подставляя (В.12) в (В.11), получаем основное уравнение вращательного движения тела вокруг закрепленной оси z :

$$\frac{d(\omega J)}{dt} = M_z. \quad (\text{В.14})$$

Так как взаимное расположение точек в твердом теле не изменяется со временем, то момент инерции является постоянной величиной, и

$$J \frac{d\omega}{dt} = J\varepsilon = M_z. \quad (\text{В.15})$$

При непрерывном распределении массы по объему для вычисления момента инерции пользуются не суммированием, а интегрированием по всему объему тела и тогда (В.13) приводится к следующему виду:

$$J = \int \rho^2 dm. \quad (\text{В.16})$$

Если удалось определить момент инерции J_0 относительно некоторой оси, проходящей через центр масс — точку с радиусом-вектором $\vec{R} = \frac{1}{m} \sum m_i \vec{r}_i$ (m_i — масса точки тела, \vec{r}_i — ее радиус-вектор), то в соответствии с теоремой Гюйгенса—Штейнера момент инерции тела J относительно любой другой оси, параллельной первоначальной и находящейся на расстоянии a от нее, равен

$$J = J_0 + ma^2, \quad (\text{В.17})$$

где m — масса тела.

Тензор инерции. Предположим, что твердое тело может вращаться вокруг некоторой неподвижной точки O . Введем в лабораторной системе отсчета декартову систему координат XYZ с началом в этой точке. Произвольная i -я точка твердого тела массы m_i будет иметь скорость $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$, где $\vec{\omega}$ — вектор угловой скорости вращения твердого тела, а \vec{r}_i — радиус-вектор, проведенный из начала координат в точку, где в данный момент времени находится i -я материальная точка. Момент импульса этой точки равен по определению

$$\vec{L}_i \equiv m_i \vec{r}_i \times \vec{v}_i = m_i \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i) = m_i \left[\vec{\omega} (\vec{r}_i)^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \vec{\omega}) \right].$$

Векторы \vec{L}_i , $\vec{\omega}$, \vec{r}_i можно рассматривать как в лабораторной системе координат XYZ , так и в системе координат xyz , жестко связанной с телом.

Перепишем выражение для \vec{L}_i в проекциях на оси системы координат xyz , начало которой лежит в точке O . Учитывая, что $(\vec{r}_i)^2 = x_i^2 + y_i^2 + z_i^2$, а $(\vec{r}_i \vec{\omega}) = x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z$, получаем

$$\begin{cases} L_{ix} = m_i \left[\omega_x (x_i^2 + y_i^2 + z_i^2) - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z) \right] = \\ \quad = m_i \left[(y_i^2 + z_i^2) \omega_x - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z \right], \\ L_{iy} = m_i \left[(x_i^2 + z_i^2) \omega_y - x_i y_i \omega_x - y_i z_i \omega_z \right], \\ L_{iz} = m_i \left[(x_i^2 + y_i^2) \omega_z - x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y \right]. \end{cases} \quad (\text{B.18})$$

Момент импульса всего тела равен сумме моментов импульсов всех элементарных масс:

$$\vec{L} = \sum_i m_i \left[\vec{\omega} (\vec{r}_i)^2 - \vec{r}_i (\vec{r}_i \cdot \vec{\omega}) \right]. \quad (\text{B.19})$$

Учитывая (B.18), соотношение (B.19) можно переписать в проекциях на координатные оси в виде:

$$\begin{aligned} L_x &= J_{xx} \omega_x + J_{xy} \omega_y + J_{xz} \omega_z, \\ L_y &= J_{yx} \omega_x + J_{yy} \omega_y + J_{yz} \omega_z, \\ L_z &= J_{zx} \omega_x + J_{zy} \omega_y + J_{zz} \omega_z. \end{aligned} \quad (\text{B.20})$$

Совокупность девяти величин $J_{xx}, J_{xy}, J_{xz}, J_{yx}, J_{yy}, J_{yz}, J_{zx}, J_{zy}, J_{zz}$ определяет *тензор инерции*

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix}. \quad (\text{B.21})$$

Проекции момента импульса на оси координат (B.20) удобно записать в матричном виде. В рассматриваемом случае начало декартовой системы координат совпадает с точкой O (центром вращения), поэтому из (B.18) и (B.20) получаем

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} L_x \\ L_y \\ L_z \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} J_{xx} & J_{xy} & J_{xz} \\ J_{yx} & J_{yy} & J_{yz} \\ J_{zx} & J_{zy} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} \sum_i m_i (y_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (x_i y_i) & -\sum_i m_i (x_i z_i) \\ -\sum_i m_i (y_i x_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + z_i^2) & -\sum_i m_i (y_i z_i) \\ -\sum_i m_i (z_i x_i) & -\sum_i m_i (z_i y_i) & \sum_i m_i (x_i^2 + y_i^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (\text{B.22})$$

Отметим, что выражение (В.19) принимает точно такой же вид, если векторы \vec{L} , $\vec{\omega}$, \vec{r}_i проецировать на оси лабораторной системы координат XYZ . Отличие заключается в том, что в покоящейся лабораторной системе координат постоянно меняются координаты x_i , y_i , z_i каждого бесконечно малого элемента тела, поэтому и компоненты тензора \hat{J} меняются со временем. В выбранной системе координат хуз радиус-вектор \vec{r}_i — неизменная величина, а проекции угловой скорости ω_x , ω_y , ω_z меняются со временем.

Диагональные элементы тензора J_{xx} , J_{yy} , J_{zz} называются *осевыми моментами инерции*. Недиагональные элементы J_{xy} , J_{yx} , J_{xz} , J_{zx} , J_{yz} , J_{zy} называются *центробежными моментами инерции*. Тензор инерции является симметричным, так как $J_{xy} = J_{yx}$, $J_{xz} = J_{zx}$, $J_{yz} = J_{zy}$. Симметричный тензор всегда можно привести к диагональному виду, то есть выбрать такую систему координат, определяемую формой тела, в которой все недиагональные элементы будут равны нулю. Соответствующие направления координатных осей называются *главными осями инерции*, а величины $J_x \equiv J_{xx}$, $J_y \equiv J_{yy}$, $J_z \equiv J_{zz}$ — *главными моментами инерции*. Оси, проходящие через центр масс тела, будем называть *центрными осями*, а оси, проходящие через центр масс и одновременно являющиеся главными, будем называть *главными центральными осями*.

Связь между моментом инерции и компонентами тензора инерции. Рассмотрим вращение твердого тела относительно некоторой закрепленной оси AA' , имеющей произвольное направление в пространстве. Представим

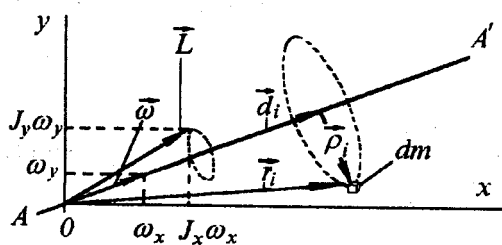


Рис. 1. Схематическое представление вращения тела вокруг закрепленной оси

радиус-вектор i -й материальной точки dm в виде $\vec{r}_i = \vec{d}_i + \vec{\rho}_i$, где $\vec{d}_i \parallel \vec{\omega}$, $\vec{\rho}_i \perp \vec{\omega}$ (вектор $\vec{\omega}$ направлен вдоль оси в соответствии с правилом правого винта) (рис. 1). Так как ось AA' закреплена, то линейная скорость точки перпендикулярна этой оси и равна $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{\rho}_i$.

Предположим, что в жестко связанной с телом системе координат

$$\hat{J} = \begin{pmatrix} J_x & 0 & 0 \\ 0 & J_y & 0 \\ 0 & 0 & J_z \end{pmatrix}.$$

Вектор угловой скорости будет иметь компоненты $\vec{\omega} = \{\omega_x, \omega_y, 0\}$. В соответствии с (В.20) $L_x = J_x \omega_x$, $L_y = J_y \omega_y$, $L_z = 0$. Отсюда следует, что в общем случае ($J_x \neq J_y$) направление вектора момента импульса, даже при вращении вокруг закрепленной оси, не совпадает с направлением вектора

угловой скорости. Кроме того (см. В.19), в рассматриваемом случае положение вектора \vec{L} жестко связано с телом. Поэтому при вращении тела вектор момента импульса меняет свое направление в пространстве: конец этого вектора описывает окружность с центром, лежащим на оси AA' . Вектор \vec{L} так же, как и радиус-вектор, удобно разложить на две составляющие — одну, совпадающую с вектором угловой скорости $\vec{\omega}$, и другую, перпендикулярную к нему, т.е. $\vec{L} = \vec{L}_{AA'} + \vec{L}_{\perp}$. В этом случае векторное уравнение (В.10) можно разбить на два скалярных уравнения:

$$\frac{dL_{AA'}}{dt} = M_{AA'}, \quad (\text{В.23})$$

$$\frac{dL_{\perp}}{dt} = M_{\perp}. \quad (\text{В.24})$$

В уравнении (В.23) $M_{AA'}$ — это проекция момента внешних сил на ось AA' (включая силы трения в оси). Это уравнение полностью описывает вращательное движение твердого тела вокруг закрепленной оси. В уравнении (В.24) M_{\perp} — это перпендикулярная проекция суммарного момента внешних сил, включая силы упругости, действующие на тело со стороны оси. Этот момент приводит к повороту вектора \vec{L} вокруг AA' . Уравнение (В.24) необходимо решать, если встает вопрос о деформациях, возникающих в оси.

Уравнение (В.23) совпадает с рассмотренным выше уравнением (В.11). Из него следует основное уравнение (В.15) вращательного движения тела вокруг закрепленной оси.

Значение момента инерции J твердого тела относительно некоторой оси можно найти, зная ее направление в пространстве и значения компонент тензора инерции. Выразим момент инерции относительно закрепленной оси AA' , проходящей через начало координат, через компоненты тензора \hat{J} . Пусть система координат хуз расположена произвольным образом относительно тела так, что все компоненты тензора \hat{J} являются ненулевыми.

Воспользуемся соотношением

$$L_{AA'} = \omega J.$$

С учетом (В.20) и того, что $L_{AA'} = L_x \cdot \cos \alpha + L_y \cdot \cos \beta + L_z \cdot \cos \gamma$, $\omega_x = \omega \cdot \cos \alpha$, $\omega_y = \omega \cdot \cos \beta$, $\omega_z = \omega \cos \gamma$, (α , β , γ — углы, определяющие положение оси AA' относительно осей координат (см. рис. 2)) получим

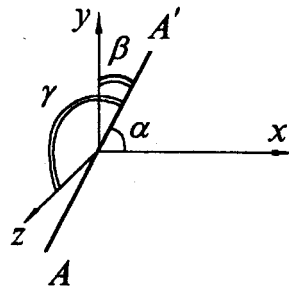


Рис. 2. Положение оси AA' относительно системы координат

$$J = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma + 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta + 2J_{xz} \cos \alpha \cos \gamma + 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma. \quad (\text{В.25})$$

Уравнение (В.25) может быть использовано и для решения обратной задачи — определения компонент тензора инерции \hat{J} через известные значения моментов инерции J относительно нескольких различных закрепленных осей.

Литература

1. *Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А.* Механика твердого тела. Лекции (Университетский курс общей физики). М.: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
2. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. 2-е изд. М: Высшая школа, 1986, гл. 8.
3. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Том I. Механика. 3-е изд. М: Наука, 1989.

1

ИЗУЧЕНИЕ ВРАЩАТЕЛЬНОГО ДВИЖЕНИЯ ТВЕРДОГО ТЕЛА ВОКРУГ ЗАКРЕПЛЕННОЙ ОСИ

Цель работы

Экспериментальная проверка основного уравнения вращательного движения твердого тела вокруг закрепленной оси.

Идея эксперимента

В эксперименте исследуется вращательное движение закрепленной на оси системы тел, у которой может меняться момент инерции. Различные моменты внешних сил создаются грузами, подвешенными на нити, намотанной на шкив.

Теория

Основное уравнение вращательного движения твердого тела с моментом инерции J вокруг неподвижной оси z имеет вид

$$J\varepsilon = M, \quad (1.1)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — угловое ускорение, M — момент внешних сил.

Для экспериментального доказательства справедливости этого соотношения в работе используется маятник Обербека (рис. 3). Он состоит из четырех стержней A и двух шкивов с различными радиусами R_1 и R_2 , укрепленных на одной горизонтальной оси. По стержням могут перемещаться и закрепляться в нужном положении четыре груза (по одному на каждом стержне) одинаковой массы m' . При помощи груза массы m , прикрепленного к концу намотанной на тот или иной шкив нити, маятник может приводиться во вращение.

Пренебрегая силами трения и считая нить невесомой и нерастяжимой, можем написать:

уравнение вращательного движения маятника

$$J\varepsilon = M \equiv (R)T, \quad (1.2)$$

уравнение поступательного движения груза на нити

$$ma = mg - T, \quad (1.3)$$

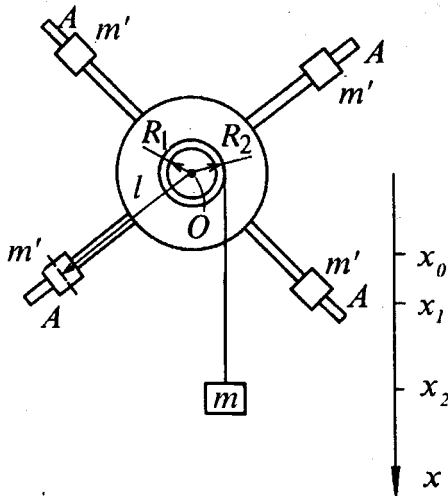


Рис. 3. Устройство маятника Обербека

уравнение кинематической связи

$$a = \varepsilon R . \quad (1.4)$$

Здесь R — радиус шкива, T — натяжение нити, a — линейное ускорение груза массы m , g — ускорение свободного падения.

Из системы уравнений (1.2)—(1.4) следует, что груз m должен двигаться с постоянным ускорением

$$a = \frac{mR^2}{J + mR^2} g . \quad (1.5)$$

Основное уравнение вращательного движения (1.1) записано без учета момента сил трения в оси маятника и момента сил вязкого трения о воздух. Для доказательства правомерности такого подхода в процессе выполнения работы необходимо убедиться, что суммарный момент сил трения $M_{\text{тр}}$ много меньше момента силы натяжения нити M , который равен:

$$M = RT = Rm(g - a) = mgR \frac{J}{J + mR^2} .$$

С учетом неравенства $mR^2 \ll J$ можно записать, что $M \approx mgR$.

Оценить величину момента сил трения можно, если предположить, что он остается неизменным во время движения. При опускании груза m с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_3 и затем при последующем подъеме до отметки x_4 изменение его потенциальной энергии будет равно работе силы трения, то есть

$$mg(x_4 - x_0) = M_{\text{тр}} \cdot \Phi ,$$

где Φ — полный угол поворота маятника Обербека. Причем

$$R\Phi = (x_3 - x_0) + (x_3 - x_4) ,$$

поэтому

$$M_{\text{тр}} = mgR \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)} .$$

Таким образом, условие малости момента сил трения окончательно имеет вид

$$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR} = \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - (x_0 + x_4)} \ll 1 . \quad (1.6)$$

Экспериментальная установка

Установка для изучения вращательного движения (рис.4) состоит из основания (1) и вертикальной колонны (2) с закрепленными на ней двумя подвижными кронштейнами (3, 4), на которых крепятся оптические датчики положения. На колонне закреплены два неподвижных кронштейна (5, 6).

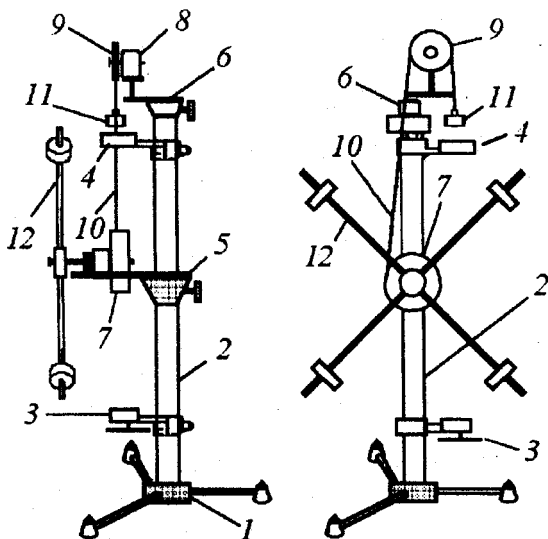


Рис. 4. Схема установки для изучения вращательного движения твердого тела

На нижнем кронштейне (5) закреплен двухступенчатый вал (7). На верхнем кронштейне (6) закреплен подшипниковый узел (8) и блок (9). Через блок перекинута нить (10), один конец которой намотан на двухступенчатый вал (7), а на втором конце закреплен груз (11). На двухступенчатом валу крепится тело маятника (12).

Кронштейны с фотодатчиками могут крепиться на разной высоте. Расстояние между этими кронштейнами измеряется по шкале, нанесенной на колонне. Время движения грузов определяют с помощью электронного таймера. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки "Пуск", остановка — кнопкой "Стоп". При переходе к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки "Сброс".

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Проверка закона движения.

Из (1.2)—(1.4) следует, что вращение маятника Обербека происходит с постоянным угловым ускорением ϵ , при этом груз m опускается с постоянным линейным ускорением a . Координата x груза, отпущенного без начальной скорости с отметки x_0 , меняется по закону (ось x системы координат направлена вниз (см. рис. 3))

$$x = x_0 + \frac{at^2}{2}. \quad (1.7)$$

Используя (1.7), определим время Δt пролета груза между двумя отметками x_1 и x_2 :

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} \left(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0} \right). \quad (1.8)$$

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения фотодатчика x_1 рассчитать среднее значение величины Δt_i по формуле

$$\langle \Delta t_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta t_{ij},$$

где N — число измерений при каждом фиксированном положении датчика.

2. Вычислить ошибку измерения (выборочное стандартное отклонение) $\langle \Delta t_i \rangle$

$$S_{\langle \Delta t_i \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N (\Delta t_{ij} - \langle \Delta t_i \rangle)^2}.$$

Результаты вычислений внести в табл. 1.1.

3. Построить зависимость Δt от $\sqrt{x_1 - x_0}$, которая должна быть линейной. Получившаяся линейная зависимость указывает на то, что движение тела является равнопеременным.

4. Найти среднее значение $\langle x_4 \rangle$ и оценить величину $\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$ по формуле (1.6). Убедиться в малости момента сил трения по сравнению с начальным моментом силы натяжения нити.

Упражнение 2. Проверка независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил.

В данном упражнении экспериментально показывается, что инерционные свойства маятника, а именно — момент инерции — не зависят от момента внешних сил.

Из уравнения (1.2) имеем

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = J. \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.5), (1.8) следует, что

$$J = mR^2 \left(\frac{g\Delta t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - 1 \right). \quad (1.10)$$

В (1.10) входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиусы R_1 и R_2 шкивов, результаты занести в рабочую тетрадь.

2. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками. Занести в рабочий журнал координаты фотодатчиков x_1 , x_2 и значение x_0 .

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения фотодатчика x_1 рассчитать среднее значение величины Δt_i по формуле

$$\langle \Delta t_i \rangle = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \Delta t_{ij},$$

где N — число измерений при каждом фиксированном положении датчика.

2. Вычислить ошибку измерения (выборочное стандартное отклонение) $\langle \Delta t_i \rangle$

$$S_{\langle \Delta t_i \rangle} = \sqrt{\frac{1}{N(N-1)} \sum_{j=1}^N (\Delta t_{ij} - \langle \Delta t_i \rangle)^2}.$$

Результаты вычислений внести в табл. 1.1.

3. Построить зависимость Δt от $\sqrt{x_1 - x_0}$, которая должна быть линейной. Получившаяся линейная зависимость указывает на то, что движение тела является равнопеременным.

4. Найти среднее значение $\langle x_4 \rangle$ и оценить величину $\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$ по формуле (1.6). Убедиться в малости момента сил трения по сравнению с начальным моментом силы натяжения нити.

Упражнение 2. Проверка независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил.

В данном упражнении экспериментально показывается, что инерционные свойства маятника, а именно — момент инерции — не зависят от момента внешних сил.

Из уравнения (1.2) имеем

$$\frac{M_1}{\varepsilon_1} = \frac{M_2}{\varepsilon_2} = J. \quad (1.9)$$

Из уравнений (1.5), (1.8) следует, что

$$J = mR^2 \left(\frac{g\Delta t^2}{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2} - 1 \right). \quad (1.10)$$

В (1.10) входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. Измерить штангенциркулем радиусы R_1 и R_2 шкивов, результаты занести в рабочую тетрадь.

2. Установить максимальное расстояние между кронштейнами с фотодатчиками. Занести в рабочий журнал координаты фотодатчиков x_1 , x_2 и значение x_0 .

3. Установить грузы m' в среднее положение, разместив их на равном расстоянии от оси таким образом, чтобы маятник находился в положении безразличного равновесия.

4. На конец нити, намотанной на шкив радиуса R_1 , прикрепить груз массы m_1 и измерить время прохождения груза между двумя фотодатчиками Δt . Одновременно измерить x_4 — отметку, до которой поднимается груз. Измерения провести 3 раза и результаты внести в табл. 1.2.

5. Перебросить нить на другой шкив (радиуса R_2) и измерить время Δt и значение x_4 (3 раза). Результаты измерений внести в табл. 1.2.

6. Провести аналогичные измерения (п.4—п.5), прикрепив к концу нити груз массы m_2 . Результаты измерений занести в табл. 1.2.

Таблица 1.2

Комбинации значений радиусов шкивов и масс при измерениях	N	Δt_{ij}	x_4	$\langle \Delta t_i \rangle$, $S_{\langle \Delta t_i \rangle}$	J_i , S_{J_i}	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$
R_1, m_1	1						
	2						
	3						
R_2, m_1	4						
	5						
	6						
R_1, m_2	7						
	8						
	9						
R_2, m_2	10						
	11						
	12						

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить средние значения величин Δt и ошибки их измерений для четырех различных опытов. Результаты вычислений внести в таблицу 1.2.

2. Вычислить значения моментов инерции $J_1 + J_4$ по формуле (1.10).

3. Определить значение $\langle x_4 \rangle$ для каждого опыта.

4. Найти отношение $\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$ аналогично тому, как это было сделано в упр. 1. Результаты внести в табл. 1.2.

4. Произвести оценку погрешностей полученных результатов. В связи с тем, что экспериментальные значения J_i являются результатом косвенных измерений, то стандартное отклонение функции нескольких независимых

переменных находится через ошибки прямых измерений по формуле для ошибки косвенных измерений.

6. Проанализировать полученный результат. Для этого отметить значения моментов инерции $J_1 + J_4$ с учетом погрешностей на числовых осях (рис. 5), выбирая $\Delta J_i = S_{J_i}$. Пересечение этих областей будет указывать на выполнение соотношения (1.9), что свидетельствует о независимости инерционных свойств маятника от момента внешних сил.

Упражнение 3. Проверка основного уравнения вращательного движения и теоремы Гюйгенса—Штейнера.

Пусть J_0' — сумма моментов инерции четырех грузов с массами m' относительно осей, проходящих через их центры масс. При удалении центров грузов на расстояние $l = l_1$, от оси вращения (см. рис. 3), согласно теореме Гюйгенса—Штейнера, их момент инерции J'_1 будет равен

$$J'_1 = J_0' + 4m'l_1^2. \quad (1.11)$$

Если J_0 — момент инерции маятника без грузов, то полный момент инерции маятника будет равен

$$J_1 = J_0 + J_0' + 4m'l_1^2. \quad (1.12)$$

При удалении центров масс грузов на расстояние l_2 соответственно имеем

$$J_2 = J_0 + J_0' + 4m'l_2^2. \quad (1.13)$$

С учетом уравнений (1.2)—(1.4) и (1.10) зависимость квадрата времени пролета груза между двумя отметками x_1 и x_2 от расстояния центров грузов m' до оси вращения l имеет вид

$$\Delta t^2 = \frac{2(\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2}{g} \left[1 + \frac{J_0 + J'_0}{mR^2} + \frac{4m'}{mR^2} \cdot l^2 \right]. \quad (1.14)$$

Если $l_1 > l_2$, то

$$J_1 - J_2 = 4m'(l_1^2 - l_2^2). \quad (1.15)$$

Уравнения (1.14) и (1.15) дают

$$\Delta t_1^2 - \Delta t_2^2 = 8 \frac{m'}{m} \frac{l_1^2 - l_2^2}{R^2 g} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0})^2, \quad (1.16)$$

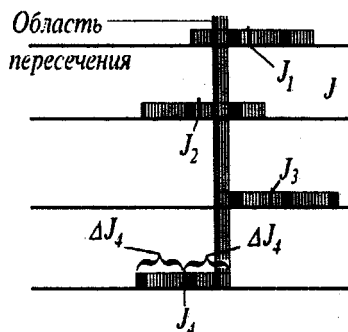


Рис. 5. Сравнение моментов инерции между собой для четырех опытов

где Δt_1 , Δt_2 — времена пролета груза между датчиками для случаев $l = l_1$ и $l = l_2$, соответственно.

В это уравнение входят величины, определяемые экспериментально.

Измерения

1. На конец нити, намотанной на шкив радиуса R_2 (большого по размеру), прикрепить груз наибольшей массы. Фотодатчики оставить в том же положении, что и в упражнении 2.

2. Установить минимальное значение момента инерции маятника. Для этого грузы m' установить в положение, наиболее близкое к оси. Измерить расстояние от грузов до оси. Занести это значение в табл. 1.3.

Таблица 1.3

N	(Δt_{ij})	x_4	$\Delta t_i, S_{\Delta t_i}$	$(\Delta t)^2, S_{(\Delta t)^2}$	l	l^2	$\langle x_4 \rangle$	$\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$
1								
2								
3								
.								

3. Определить величину Δt — время прохождения груза m между двумя фотодатчиками и x_4 — отметку, до которой он поднимается в процессе движения. Измерения проводят 3 раза. Результаты заносят в табл. 1.3.

4. Изменяя положение грузов m' на стержнях с шагом 3 см, каждый раз измеряют время Δt . Результаты измерения и соответствующие им расстояния l от оси маятника до центров грузов записать в табл. 1.3. Одновременно для каждого опыта измеряют и заносят в табл. 1.3 значения величины x_4 .

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого положения грузов m' найти средние значения величин Δt_i .

2. Вычислить погрешности измерения Δt_i и $(\Delta t_i)^2$.

3. Построить график зависимости квадрата времени опускания груза $(\Delta t)^2$ от l^2 , это должна быть прямая линия.

4. Проверить соотношение (1.16) для нескольких пар значений Δt^2 и l^2 .

5. Для каждого момента инерции определить $\langle x_4 \rangle$ и отношение $\frac{M_{\text{тр}}}{mgR}$.

Убедиться в выполнении приближения $\frac{M_{\text{тр}}}{mR} \ll 1$.

Основные итоги работы

При выполнении работы должна быть проведена экспериментальная проверка выполнения основного уравнения вращательного движения — уравнения моментов. Должны быть проверены соотношения (1.9) и (1.16) и установлена линейная зависимость $(\Delta t)^2$ от l^2 .

Контрольные вопросы

1. Что такое абсолютно твердое тело? Сколько степеней свободы имеет твердое тело? Сколько независимых скалярных уравнений требуется для описания движения твердого тела?
2. Почему угловая скорость является вектором? Куда направлен этот вектор?
3. Что такое момент силы относительно некоторой точки? Куда он направлен? Что такое момент силы относительно закрепленной оси?
4. Что такое момент импульса системы тел?
5. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
6. Сформулируйте теорему Гюйгенса-Штейнера.
7. Как получить уравнение моментов и основное уравнение вращательного движения относительно закрепленной оси?

Литература

1. Матвеев А.Н. Механика и теория относительности. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986, § 31, 32, 34.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. 3-е изд. М.: Наука, 1989, § 30, 35.
3. Деденко Л.Г., Керженцев В.В. Математическая обработка результатов эксперимента в лабораториях общего физического практикума. М.: Изд-во Моск. ун-та, 1977.

2

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ И ПРОВЕРКА ТЕОРЕМЫ ГЮЙГЕНСА—ШТЕЙНЕРА МЕТОДОМ КРУТИЛЬНЫХ КОЛЕБАНИЙ

Цель работы

Определение моментов инерции тел простой формы и экспериментальная проверка теоремы Гюйгенса—Штейнера.

Идея эксперимента

В эксперименте используется связь между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. В качестве маятника выбрана круглая платформа, подвешенная в поле тяжести на трех длинных нитях (трифилярный подвес). Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси. На платформу помещаются тела различной формы, измеряются периоды колебаний маятника и определяются значения моментов инерции этих тел. Теорема Гюйгенса—Штейнера проверяется по соответствию между данными эксперимента и теоретической зависимости моментов инерции грузов от их расстояния до центра платформы.

Теория

Теорема Гюйгенса—Штейнера. Если момент инерции тела относительно некоторой оси вращения, проходящей через центр масс, имеет значение J_0 , то относительно любой другой оси, находящейся на расстоянии a от первой и параллельной ей, он будет равен

$$J = J_0 + ma^2, \quad (2.1)$$

где m — масса тела.

Для проверки теоремы Гюйгенса—Штейнера в данной работе исследуются крутильные колебания твердого тела на трифилярном подвесе.

Трифилярный подвес представляет собой круглую платформу радиуса R , подвешенную на трех симметрично расположенных нитях одинаковой длины, укрепленных у ее краев (рис. 6). Наверху эти нити также симметрично прикреплены к диску несколько меньшего размера (радиуса r). Платформа может совершать крутильные колебания вокруг вертикальной оси OO' , перпендикулярной к ее плоскости и проходящей через ее центр. Такое движение платформы приводит к изменению положения ее центра тяжести по высоте.

Если платформа массы m , вращаясь в одном направлении, поднялась на высоту h , то приращение ее потенциальной энергии будет равно

$$E_1 = mgh, \quad (2.2)$$

где g — ускорение силы тяжести. Вращаясь в другом направлении, платформа придет в положение равновесия ($h = 0$) с кинетической энергией, равной

$$E_2 = \frac{1}{2} J \omega_0^2, \quad (2.3)$$

где J — момент инерции платформы, ω_0 — угловая скорость вращения платформы в момент прохождения ею положения равновесия.

Пренебрегая работой сил трения, на основании закона сохранения механической энергии имеем:

$$mgh = \frac{1}{2} J \omega_0^2. \quad (2.4)$$

Считая, что платформа совершает гармонические крутильные колебания, можно записать зависимость углового смещения платформы α от времени t в виде

$$\alpha = \alpha_0 \cdot \sin\left(\frac{2\pi}{T} \cdot t\right), \quad (2.5)$$

где α_0 — угол максимального поворота платформы, т.е. амплитуда углового смещения, T — период колебаний. Для угловой скорости ω , являющейся первой производной по времени от величины углового смещения, можно записать

$$\omega = \frac{d\alpha}{dt} = \frac{2\pi\alpha_0}{T} \cdot \cos\frac{2\pi}{T}t. \quad (2.6)$$

В моменты прохождения платформы через положение равновесия ($t = 0; 0,5T; \dots$) величина $\omega(t)$ будет максимальна и равна по модулю

$$\omega_0 = \frac{2\pi\alpha_0}{T}. \quad (2.7)$$

Из выражений (2.4) и (2.7) следует, что

$$mgh = \frac{1}{2} J \left(\frac{2\pi\alpha_0}{T}\right)^2. \quad (2.8)$$

Если l — длина нитей подвеса, R — расстояние от центра платформы до точек крепления нитей на ней, r — радиус верхнего диска (рис. 6), то легко видеть, что

$$h = OO_1 = BC - BC_1 = \frac{(BC)^2 - (BC_1)^2}{BC + BC_1}. \quad (2.9)$$

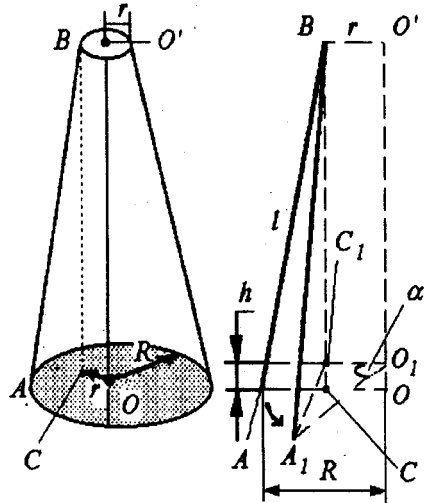


Рис. 6. Устройство трифилярного подвеса

Так как

$$(BC)^2 = (AB)^2 - (AC)^2 = l^2 - (R - r)^2, \quad (2.10)$$

а при максимальном отклонении платформы от положения равновесия

$$(BC_1)^2 = (A_1B)^2 - (A_1C_1)^2 = l^2 - (R^2 + r^2 - 2Rr \cos \alpha_0), \quad (2.11)$$

то

$$h = \frac{2Rr(1 - \cos \alpha_0)}{BC + BC_1} = \frac{4Rr \sin^2 \frac{\alpha_0}{2}}{BC + BC_1}. \quad (2.12)$$

При малых углах отклонения α_0 значение синуса этого угла можно заменить просто значением α_0 . Учитывая также, что при $R \ll l$ величину знаменателя можно положить равной $2l$, получаем

$$h = \frac{Rr \alpha_0^2}{2l}. \quad (2.13)$$

При этом закон сохранения энергии (2.9) примет вид:

$$mg \frac{Rr \alpha_0^2}{2l} = \frac{1}{2} J \left(\frac{2\pi \alpha_0}{T} \right)^2, \quad (2.14)$$

откуда следует, что

$$J = \frac{mgRr}{4\pi^2 l} T^2. \quad (2.15)$$

По формуле (2.15) можно экспериментально определить момент инерции пустой платформы или платформы с телом, положенным на нее, так как все величины в правой части формулы непосредственно измеряются. Следует помнить, что m — это суммарная масса платформы и исследуемого тела, положенного на нее.

Соотношение (2.15) используется в лабораторной работе для определения моментов инерции тел простой формы и подтверждения справедливости теоремы Гюйгенса—Штейнера.

Экспериментальная установка

Вид установки показан на рис. 6. Отношение радиуса платформы к длине нитей подвеса составляет $\frac{R}{l} \leq 0,05$, что соответствует приближениям, используемым при выводе формулы (2.15).

Тела на платформу необходимо класть строго симметрично, так, чтобы не было перекоса платформы. Для облегчения определения положения грузов и более точной их установки на платформе нанесены концентрические окружности на определенном расстоянии друг от друга (5 мм).

Вращательный импульс, необходимый для запуска крутильных колебаний, сообщается платформе путем поворота верхнего диска вокруг его

оси. Это достигается с помощью шнура, связанного с рычагом, закрепленным на верхнем диске. При таком возбуждении колебаний почти полностью отсутствуют другие типы колебаний, наличие которых затрудняет измерения*.

Система измерения времени включает в себя электронный таймер с фотодатчиком, укрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки "Пуск", остановка — кнопкой "Стоп". При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки "Сброс".

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Проверка теоремы Гюйгенса—Штейнера

Измерения

Для проверки теоремы Гюйгенса—Штейнера используют два одинаковых тела (в данной работе они имеют цилиндрическую форму). Перед каждым измерением следует остановить платформу.

1. Произвести взвешивание грузов.

2. Установить грузы в центре платформы, положив их один на другой. Создать крутильные колебания платформы. Измерить время t_n нескольких колебаний ($n = 15 - 20$). Данные занести в табл. 2.1.

Таблица 2.1

Номер опыта	a	a^2	n	t_n	$T_i = \frac{t_n}{n}$	J_i
1						
2						
3						
.						

3. Расположить грузы симметрично на платформе. Провести измерения времени колебаний t_n для 5—7 положений грузов, постепенно перемещая их к краям платформы. Рекомендуется перемещать грузы каждый раз на 1 см. Занести в табл. 2.1 значения расстояний a от центра масс каждого тела до центра платформы, число колебаний n и значения времени этих колебаний t_n .

Обработка результатов

1. Для каждого положения грузов определить период колебаний грузов T_i .
2. Занести в таблицу значения a^2 .
3. Для каждого положения грузов найти значение момента инерции

*При измерениях не следует использовать амплитуды колебаний, большие, чем 10° .

платформы с грузами J_i по формуле (2.15). Величины l , R , r и масса платформы даются, как постоянные установки.

4. Полученные значения J_i нанести на график зависимости момента инерции системы тел от квадрата расстояния центра масс каждого груза до оси вращения $J(a^2)$ (схематично эта зависимость представлена на рис. 7).

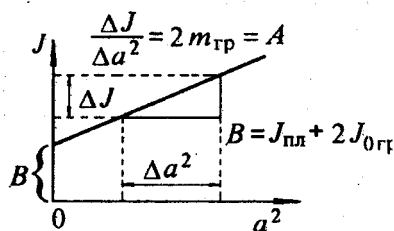


Рис. 7. Схематическое представление зависимости J от a^2

$m_{гр} = \frac{A}{2}$. Сравнить полученное значение с массами грузов $m_{гр}$, найденными при взвешивании. Совпадение этих величин (с учетом погрешностей вычислений) также указывает на выполнение теоремы Гюйгенса—Штейнера.

Как следует из теоремы Гюйгенса—Штейнера, этот график должен быть прямой линией, с угловым коэффициентом, численно равным $2m_{гр}$, так как используются два тела с одинаковой массой $m_{гр}$.

5. С помощью метода наименьших квадратов (МНК) построить зависимость J от a^2 , $J = B + A \cdot a^2$. Определить ошибки значений A и B по формулам МНК. Из зависимости $J(a^2)$ определить значение

Упражнение 2. Определение момента инерции тела методом колебаний

Измерения

1. Момент инерции пустой платформы $J_{пл}$ определяют по формуле 2.15. Измерить период колебаний пустой платформы $T_{пл}$.

Сообщают платформе вращательный импульс и измеряют время t_n некоторого числа ($n = 15 - 20$) полных колебаний, что дает возможность достаточно точно определить величину периода $T_{пл}$. Такие измерения проводят 3—5 раз. Полученные результаты заносят в таблицу 2.2.

Таблица 2.2

Тело	N эксп.	n	t_n	T	$\langle T \rangle$	S_T	J	S_J
1. Пустая платформа	1							
	2							
							
2. Платформа с квадратной пластиной	1							
	2							
							
3. Платформа с треугольной пластиной	1							
	2							
							

2. Платформу поочередно нагружают исследуемыми телами таким образом, чтобы их центр масс совпадал с осью вращения платформы (совпадали отверстия в теле и платформе). Масса этих тел известна или может быть определена с помощью взвешивания. В качестве исследуемых тел выбираются пластины, имеющие форму квадрата и равностороннего треугольника. Измеряют время t_n нескольких колебаний всей системы. Для каждого тела проводят измерения 3—5 раз. Результаты измерений заносятся в табл. 2.2.

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным для каждого опыта найти значение величины периода крутильных колебаний

$$T_{ni} = \frac{t_{ni}}{n}.$$

2. Найти средние арифметические значения и среднеквадратичные отклонения для периодов колебаний пустой платформы ($T_{пл}$) и платформы с исследуемыми телами (T_2 и T_3).

3. По формуле (2.16) определить величины $J_{пл}$, J_2 , J_3 и вычислить среднеквадратичные отклонения этих величин.

4. Вычислить моменты инерции квадратной и треугольной пластин по формулам:

$$J_{кв} = J_2 - J_{пл},$$

$$J_{тр} = J_3 - J_{пл}. \quad (2.20)$$

Найти среднеквадратичные отклонения этих величин.

5. Провести сравнение экспериментально полученных значений $J_{кв}$ и $J_{тр}$ с рассчитанными теоретически (см. Приложение) по формулам:

$$J_{кв} = \frac{1}{6}md^2 \quad (2.21)$$

для квадрата и

$$J_{тр} = \frac{1}{12}md^2 \quad (2.22)$$

для равностороннего треугольника, где m — масса пластины, d — ее сторона.

6. Провести сопоставление величины $J_{пл}$ с величиной B , полученной в упр. 1, таким образом проверить соотношение $B = J_{пл} + 2 \frac{md^2}{2}$ ($\frac{md^2}{2}$ — момент инерции дисков, используемых при выполнении упр. 1).

Основные итоги работы

В результате выполнения работы должна быть проведена проверка выполнения теоремы Гюйгенса—Штейнера. Должно быть также проведено сравнение экспериментально найденного значения момента инерции для тела заданной формы с соответствующим значением, рассчитанным теоретически.

Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса—Штейнера.

Литература

1. *Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А.* Механика твердого тела. Лекции (Университетский курс общей физики). М.: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
2. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. 2-е изд. М.: Высшая школа, 1986, § 31, 32, 34.
2. *Сивухин Д.В.* Общий курс физики. Том I. Механика, 3-е изд. М.: Наука, 1989, § 30, 35.



ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТОВ ИНЕРЦИИ ТЕЛ ПРОСТОЙ ФОРМЫ

Цель работы

Экспериментальное определение моментов инерции тел простой формы.

Идея эксперимента

Идея эксперимента состоит в использовании связи между периодом колебаний крутильного маятника и его моментом инерции. Исследуемое тело является составной частью крутильного маятника. В процессе эксперимента находится период колебаний маятника и коэффициент жесткости пружины. Моменты инерции исследуемых тел определяются из этих данных.

Теория

Соотношение между моментом количества движения L твердого тела, вращающегося вокруг закрепленной оси, и моментом внешних сил M имеет вид:

$$\frac{d}{dt} L = M. \quad (3.1)$$

В свою очередь, момент количества движения относительно одной из главных осей вращения абсолютно твердого тела связан с осевым моментом инерции J и угловой скоростью ω следующим соотношением

$$L = J\omega. \quad (3.2)$$

С учетом (3.2) соотношение (3.1) можно переписать в следующем виде:

$$M = J \frac{d\omega}{dt} = J \frac{d^2\varphi}{dt^2}, \quad (3.3)$$

где φ — угол поворота тела вокруг оси.

Рассмотрим случай, когда тело, закрепленное на оси, совершает крутильные колебания под действием спиральной пружины (рис. 8). В соответствии с законом Гука для небольших отклонений от положения равновесия для вращающего момента упругой пружины можно записать

$$M = -D\varphi, \quad (3.4)$$

где D — жесткость пружины.

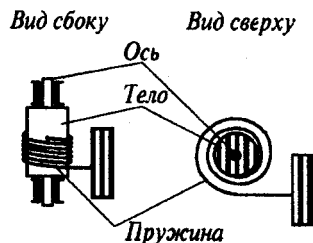


Рис. 8. Схематическое представление крутильного маятника

С учетом (3.3) и (3.4) можно записать уравнение движения тела:

$$J \frac{d^2\varphi}{dt^2} + D\varphi = 0 \quad (3.5)$$

или

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} + \frac{D}{J} \varphi = 0. \quad (3.6)$$

Из (3.6) для частоты колебаний крутильного маятника ω_0 ($\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$) получаем

$$\omega_0^2 = \frac{D}{J}. \quad (3.7)$$

Период колебаний T , в свою очередь, равен

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J}{D}}. \quad (3.8)$$

Рассмотрим колебания крутильного маятника, в состав которого входят два одинаковых груза, закрепленных на стержне на одинаковых расстояниях a от оси вращения. В этом случае момент инерции маятника в соответствии с теоремой Гюйгенса—Штейнера равен

$$J = J_0 + J_c + 2m_{\text{гр}}a^2 + 2J_{\text{гр}} \quad (3.9)$$

где J_0 — момент инерции той части маятника, на которой крепятся все остальные элементы кроме грузов, J_c — момент инерции стержня, $J_{\text{гр}}$ — момент инерции груза относительно его центра масс, $m_{\text{гр}}$ — масса груза. Тогда период колебаний (см. (3.8)) запишется так:

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_c + 2m_{\text{гр}}a^2 + 2J_{\text{гр}}}{D}}, \quad (3.10)$$

т. е. квадрат периода колебаний линейно зависит от квадрата расстояния a

$$T^2 = 4\pi^2 \left(\frac{J_0 + J_c + 2J_{\text{гр}}}{D} \right) + \frac{4\pi^2 \cdot 2m_{\text{гр}}}{D} a^2. \quad (3.11)$$

На рис. 9 схематично представлена зависимость T^2 от a^2 . Зная эту зависимость, можно легко определить коэффициент жесткости пружины D (через угловой коэффициент прямой $A = \frac{8\pi^2 m_{\text{гр}}}{D}$ и величину J_0 (используя значение B (см. рис. 9) и рассчитанные значения J_c и $J_{\text{гр}}$).

Если теперь вместо стержня с грузами в состав маятника включить тело

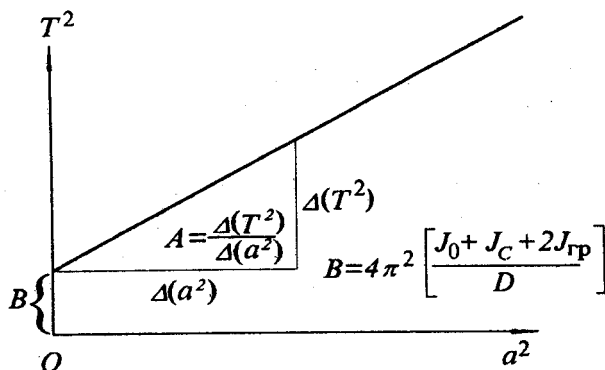


Рис. 9. Схематичное представление зависимости квадрата колебаний крутильного маятника от квадрата расстояния от оси вращения до центра масс груза $m_{гр}$, укрепленного на стержне

с неизвестным моментом инерции J_x , то период колебаний такого маятника будет равен

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_0 + J_x}{D}}, \quad (3.12)$$

откуда

$$J_x = \frac{T_1^2 D}{4\pi^2} - J_0. \quad (3.13)$$

Экспериментальная установка

Установка состоит из крутильного маятника, системы для измерения времени колебаний и набора образцов, для которых производят измерения моментов инерции (рис. 10).

Крутильный маятник может вращаться вокруг вертикальной оси. Пружина маятника изготовлена из упругой стальной проволоки.

Система измерения времени включает в себя электронный таймер с фотодатчиком, укрепленным на подставке. При проведении измерений датчик устанавливается в удобное положение. Запуск таймера осуществляется нажатием кнопки "Пуск", остановка — кнопкой "Стоп". При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло таймера нажатием кнопки "Сброс".

В наборе съемных образцов имеются стержень с цилиндрическими грузами, цилиндр, шар, диск. Образцы крепятся на вертикальной оси маятника.

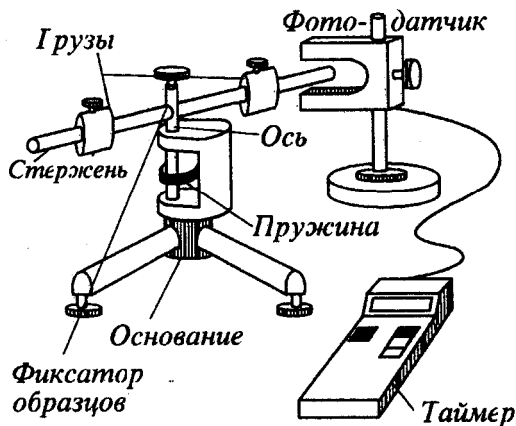


Рис. 10. Блок-схема экспериментальной установки

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение коэффициента жесткости пружины и момента инерции тела маятника.

На маятнике закрепляют стержень с грузами. Производят измерения периода малых колебаний маятника для различных положений грузиков, строят зависимость квадрата периода колебаний от квадрата расстояния a .

Измерения

1. Определить массу стержня m_c , массу груза $m_{гр}$, длину стержня l_c , радиус отверстия R_1 , внешний радиус R_2 и длину цилиндрических грузов $l_{гр}$, крепящихся на нем. Данные занести в табл. 3.1.

Таблица 3.1

m_c	$m_{гр}$	l_c	R_1	R_2	$l_{гр}$

2. Закрепить на маятнике стержень с цилиндрическими грузами, расположив его симметрично относительно оси вращения так, как показано на рис. 11.

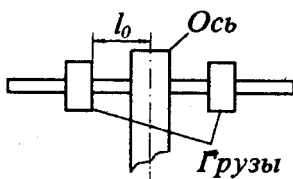


Рис. 11. Положение грузов на стержне крутильного маятника

3. Установить грузы симметрично на стержне в положении, наиболее близком к оси. Записать расстояние от грузов до оси l_0 (см. рис. 11) в табл. 3.2.

4. Измерить время t_n нескольких колебаний* ($n = 10 - 20$). Данные занести в табл. 3.2.

5. Произвести измерения времени колебаний t_n для 7—9 положений грузов, постепенно перемещая их к краям стержня. Рекомендуется проводить измерения через каждые 2 см.

Таблица 3.2

Номер измерения	l_0	n	t_n	T	T^2	a^2
1						
2						
3						
·	·	·	·	·	·	·

Обработка результатов

1. Для каждого положения грузов вычислить период колебаний T и квадрат этой величины. Результаты занести в табл. 3.2.

*Угловые амплитуды колебаний маятника должны быть $\sim 5-7^\circ$.

2. Определить значения $a^2 = \left(l_0 + \frac{l_{\text{гр}}}{2} \right)^2$ для каждого положения грузов.

3. Построить зависимость T^2 от a^2 . С помощью метода наименьших квадратов (МНК) определить коэффициенты A и B в зависимости $T^2 = B + A a^2$ по соответствующим формулам МНК. Определить ошибки значений A и B . Результаты занести в табл. 3.3.

4. По наклону этой прямой (см. рис. 9) в соответствии с (3.11) определить коэффициент жесткости пружины

$$D = 4\pi^2 \frac{2m_{\text{гр}}}{A}$$

Результаты вычислений занести в табл. 3.3.

Таблица 3.3

A	S_A	B	S_B	D	S_D	J_c	S_{J_c}	$J_{\text{гр}}$	$S_{J_{\text{гр}}}$	J_0	S_{J_0}

5. Определить стандартное отклонение значения коэффициента жесткости — S_D . Результаты записать в табл. 3.3.

6. Определить моменты инерции стержня и грузов по формулам (см. Приложение)

$$J_c = \frac{1}{12} m_c l_c^2; \quad J_z = \frac{1}{12} m_{\text{гр}} l_{\text{гр}}^2 + \frac{1}{4} m_{\text{гр}} (R_1^2 + R_2^2)$$

и стандартные отклонения для этих величин. Результаты вычислений внести в табл. 3.3.

7. В соответствии с (3.11),

$$B = 4\pi^2 \frac{J_0 + J_c + 2J_{\text{гр}}}{D},$$

т.е.

$$J_0 = \frac{B D}{4\pi^2} - J_c - 2J_{\text{гр}}.$$

Определить величину момента инерции тела маятника J_0 и ее стандартное отклонение*. Результаты вычислений занести в табл. 3.3.

Упражнение 2. Определение моментов инерции тел простой формы.

В этом упражнении проводится измерение моментов инерции цилиндра, шара и тонкого диска.

Измерения

1. Определить массу (путем взвешивания) и геометрические размеры цилиндра, тора и диска. Оценить погрешности измерений. Результаты измерений занести в табл. 3.4.

* Момент инерции маятника незначителен, поэтому при больших погрешностях его определения (большие амплитуды колебаний и т.д.) вычисления могут давать отрицательные значения его величины.

2. Закрепить цилиндр на оси маятника. Три раза измерить время t_n нескольких колебаний ($n = 10 - 15$). Данные занести в табл. 3.5.

Таблица 3.4

Тело	$m_{\text{ц}}$	$S_{m_{\text{ц}}}$	$R_{\text{ц}}$	$S_{R_{\text{ц}}}$	$h_{\text{ц}}$	$S_{h_{\text{ц}}}$
Цилиндр						
Шар						
Диск						

Таблица 3.5

Тело	N	n	t_n	T	$\langle T \rangle$	S_T	$J_{\text{эксп}}$	$S_{J_{\text{эксп}}}$	$J_{\text{теор}} \pm S_{J_{\text{теор}}}$
Цилиндр	1								
	2								
	3								
Шар	4								
	5								
	6								
Диск	7								
	8								
	9								

4. Провести аналогичные измерения для шара и диска. Данные измерений занести в табл. 3.4 и 3.5.

Обработка результатов

1. Для каждого опыта вычислить значение периода колебаний.

2. Определить выборочные средние значения (средние арифметические значения) периода колебаний $\langle T \rangle$ для каждого тела. Результаты внести в табл. 3.5.

3. Вычислить выборочные стандартные отклонения (среднеквадратичные ошибки) для $\langle T \rangle$. Результаты вычислений внести в табл. 3.5.

4. По формуле (3.13) определить значения моментов инерции цилиндра, шара и диска (соответственно $J_{\text{ц}}^{\text{эксп}}$, $J_{\text{ш}}^{\text{эксп}}$, $J_{\text{д}}^{\text{эксп}}$). Занести эти значения в табл. 3.5.

5. Найти стандартные отклонения этих величин. Результаты вычислений занести в табл. 3.5.

6. Рассчитать теоретические значения моментов инерции цилиндра, шара и диска по формулам (см. Приложение):

$$J_{\text{ц}}^{\text{теор}} = \frac{1}{2} m_{\text{ц}} R_{\text{ц}}^2; \quad J_{\text{ш}}^{\text{теор}} = \frac{2}{5} m_{\text{ш}} R_{\text{ш}}^2; \quad J_{\text{д}}^{\text{теор}} = \frac{1}{2} m_{\text{д}} R_{\text{д}}^2.$$

7. Сравнить экспериментальные и теоретические значения моментов инерции всех исследованных тел (должны перекрываться области $(J_{\text{эксп}} - S_{J_{\text{эксп}}}, J_{\text{эксп}} + S_{J_{\text{эксп}}})$ и $(J_{\text{теор}} - S_{J_{\text{теор}}}, J_{\text{теор}} + S_{J_{\text{теор}}})$).

Основные итоги работы

В процессе выполнения работы должен быть определен коэффициент жесткости пружины, момент инерции маятника. Должны быть определены моменты инерции шара, цилиндра, диска и проведено сравнение этих значений со значениями, рассчитанными теоретически.

Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса—Штейнера.

Литература

1. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваяев В.А. Механика твердого тела. Лекции (Университетский курс общей физики). М.: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1989. гл.V.

4

ОПРЕДЕЛЕНИЕ МОМЕНТА
ИНЕРЦИИ КОЛЕСА

Цель работы

Знакомство с методами определения момента инерции твердого тела.

Идея эксперимента

В работе используются два способа экспериментального определения момента инерции. Первый основан на использовании зависимости периода колебаний физического маятника от его момента инерции. Второй — на анализе инерционных свойств твердого тела, закрепленного на оси, при его вращательном движении. Кроме этого, проводится прямой расчет момента инерции исследуемого тела известной геометрии.

Теория

Уравнение вращательного движения для твердого тела, закрепленного на оси, имеет вид

$$J\epsilon = M, \quad (4.1)$$

где J — момент инерции твердого тела относительно оси вращения, ϵ — его угловое ускорение, M — момент внешних сил, приложенных к телу.

Величина момента инерции относительно какой-либо оси определяется пространственным распределением массы тела. В частности, для тела, состоящего из конечного числа элементарных (малых) масс m_i ,

$$J = \sum_i m_i \rho_i^2, \quad (4.2)$$

где ρ_i — расстояние этой элементарной массы до оси вращения. В общем случае, для сплошных тел, суммирование заменяется интегрированием:

$$J = \int \rho^2 dm$$

Для некоторых тел простой формы возможен прямой расчет момента инерции. При сложной форме тела и неравномерном распределении его плотности аналитический расчет величины момента инерции может стать достаточно сложной задачей.

В данной работе применяются два способа экспериментального определения момента инерции: с помощью анализа колебаний физического маятника, составной частью которого является исследуемое тело, и с помощью изучения вращательного движения этого тела.

Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его колебаний как физического маятника. Если закрепить исследуемое тело A на горизонтальной оси O , проходящей через центр масс (рис. 12), то

момент сил тяготения будет равен нулю, и тело остается в состоянии безразличного равновесия. Если теперь закрепить на исследуемом теле на некотором удалении L от оси малое тело B с известной массой m , то равновесие перестанет быть безразличным — при равновесии момент силы тяжести, действующей на тело B будет равен нулю. Такую систему тел можно рассматривать как физический маятник.

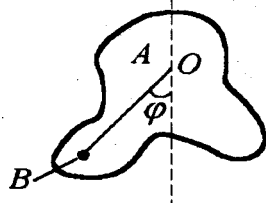


Рис. 12. Схематическое представление физического маятника

Уравнение движения такого маятника имеет вид

$$(J + J_B) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - mgL \sin \varphi, \quad (4.3)$$

где J , J_B — моменты инерции твердого тела A и дополнительного грузика B относительно оси O , g — ускорение свободного падения, φ — угол отклонения тела от положения равновесия, $\frac{d^2 \varphi}{dt^2}$ — его угловое ускорение.

Если углы отклонения малы ($\varphi \leq 4^\circ$), то $\sin \varphi \approx \varphi$, и можно записать

$$(J + J_B) \frac{d^2 \varphi}{dt^2} + mgL \varphi = 0. \quad (4.4)$$

Данное уравнение является уравнением собственных (свободных) гармонических колебаний, его решение имеет вид

$$\varphi = \varphi_0 \sin(\omega_0 t + \theta_0), \quad (4.5)$$

где $\omega_0 = \frac{2\pi}{T}$ — собственная циклическая частота, T — период колебаний, φ_0 — амплитуда колебаний, θ_0 — начальная фаза колебаний.

Дважды дифференцируя соотношение (4.5) по времени, получаем

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} = - \omega_0^2 \varphi. \quad (4.6)$$

Сопоставляя (4.4) и (4.6), находим, что

$$\omega_0^2 = \frac{4\pi^2}{T^2} = \frac{mgL}{J + J_B}. \quad (4.7)$$

В связи с тем, что размеры тела B во много раз меньше расстояния до оси L , можно считать его материальной точкой и положить

$$J_B = mL^2. \quad (4.8)$$

Тогда из уравнений (4.7) и (4.8) получаем

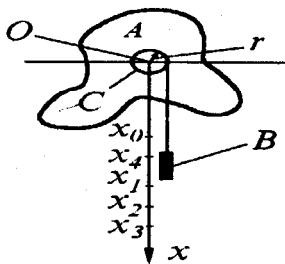
$$J = mL \left(\frac{gT^2}{4\pi^2} - L \right). \quad (4.9)$$

Таким образом, для определения момента инерции твердого тела можно закрепить его на оси, проходящей через центр масс, установить на

нем добавочное малое тело с известной массой, измерить период колебаний и, зная расстояние L , по формуле (4.9) определить неизвестный момент инерции.

Отметим, что при выводе соотношения (4.9) не учитывалось влияние момента сил трения ($M_{\text{тр}}$) в оси. Это возможно, так как при достаточно малом $M_{\text{тр}}$ его воздействие приводит прежде всего к постепенному уменьшению амплитуды колебаний и практически не влияет на их период.

Определение момента инерции твердого тела на основе анализа его равноускоренного вращательного движения. Рассмотрим, как и в предыдущем случае, тело A , закрепленное на оси O , проходящей через его центр масс (рис. 13). Соосно с телом закреплен цилиндр C , на который наматывается нить с прикрепленным к ней грузом B .



Под действием силы тяжести груз B будет опускаться, приводя тело A во вращение. Уравнение движения груза B , уравнение вращательного движения тела A и уравнение кинематической связи имеют вид

$$ma = mg - T, \quad (4.10)$$

$$J\epsilon = Tr - M_{\text{тр}}, \quad (4.11)$$

$$a = \epsilon r, \quad (4.12)$$

Рис. 13. Схематическое представление твердого тела, закрепленного на оси и вращающегося под действием груза B

где m — масса груза B , J — момент инерции исследуемого тела вместе с цилиндром C , g — ускорение силы тяжести, T — натяжение нити, r — радиус цилиндра, на который наматана нить, $M_{\text{тр}}$ — момент сил трения, a — ускорение тела B .

Из уравнений (4.10) — (4.12) получаем

$$J = mr^2 \left(\frac{g}{a} - 1 \right) - \frac{M_{\text{тр}} \cdot r}{a}. \quad (4.13)$$

Таким образом, если известно ускорение груза B и момент сил трения в оси, то по формуле (4.13) мы можем найти момент инерции исследуемого тела.

Предположим, что груз начинает опускаться с отметки $x_0 = 0$, а мы измеряем время Δt прохождения его между двумя точками x_1 и x_2 . Движение грузика на участке $x_1 - x_2$ является равноускоренным, и можно записать

$$x_1 = x_0 + \frac{at_1^2}{2}, \quad (4.14)$$

$$x_2 = x_0 + \frac{a(t_1 + \Delta t)^2}{2}, \quad (4.15)$$

где t_1 — время прохождения участка $x_1 - x_0$, Δt — время прохождения участка $x_2 - x_1$.

Из (4.14) и (4.15) следует:

$$\Delta t = \sqrt{\frac{2}{a}} (\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}). \quad (4.16)$$

Решая это уравнение относительно ускорения a , находим

$$a = 2 \frac{\sqrt{x_2 - x_0} - \sqrt{x_1 - x_0}}{\Delta t^2}. \quad (4.17)$$

Таким образом, для определения a нам нужно знать x_0 , x_1 , x_2 и время Δt прохождения грузика между точками с координатами x_1 и x_2 .

Рассмотрим соотношения, позволяющие определить момент сил трения. При опускании груза с отметки x_0 на полную длину нити до отметки x_3 его потенциальная энергия переходит в кинетическую и в некоторое количество тепловой энергии, по величине равное работе сил трения,

$$mg(x_3 - x_0) = E_k + \Phi M_{\text{тр}}, \quad (4.18)$$

где Φ — полный угол поворота тела при его опускании, E_k — кинетическая энергия системы в нижней точке. Предполагается, что момент силы трения при движении остается постоянным, т.е. не зависит от скорости.

После того, как груз опустится на полную длину нити до отметки x_3 , тело будет продолжать вращаться, и нить начнет наматываться на цилиндр. В результате груз поднимется до отметки x_4 . Очевидно,

$$E_k = mg(x_3 - x_4) + \Phi_1 M_{\text{тр}}, \quad (4.19)$$

где Φ_1 — полный угол поворота тела при подъеме груза.

Учитывая, что $(x_3 - x_0) = r\Phi$ и $(x_3 - x_4) = r\Phi_1$, получаем величину момента силы трения

$$M_{\text{тр}} = mgr \cdot \frac{x_4 - x_0}{2x_3 - x_0 - x_4}. \quad (4.20)$$

Экспериментальная установка

Основной частью установки является сплошное колесо (рис. 14), которое может вращаться вокруг горизонтальной оси. К цилиндру, расположенному на оси колеса, с помощью нити прикреплен груз. Помещая груз в устройство для его крепления, получаем физический маятник, который может колебаться около положения равновесия. Угол отклонения может быть определен по угломерной шкале. В том случае, когда груз освобожден (при этом устройство для его крепления снимается с колеса), под действием силы тяжести он начнет опускаться, приводя колесо во вращение. Установка снабжена системами регистрации периода колебаний колеса и времени опускания груза.

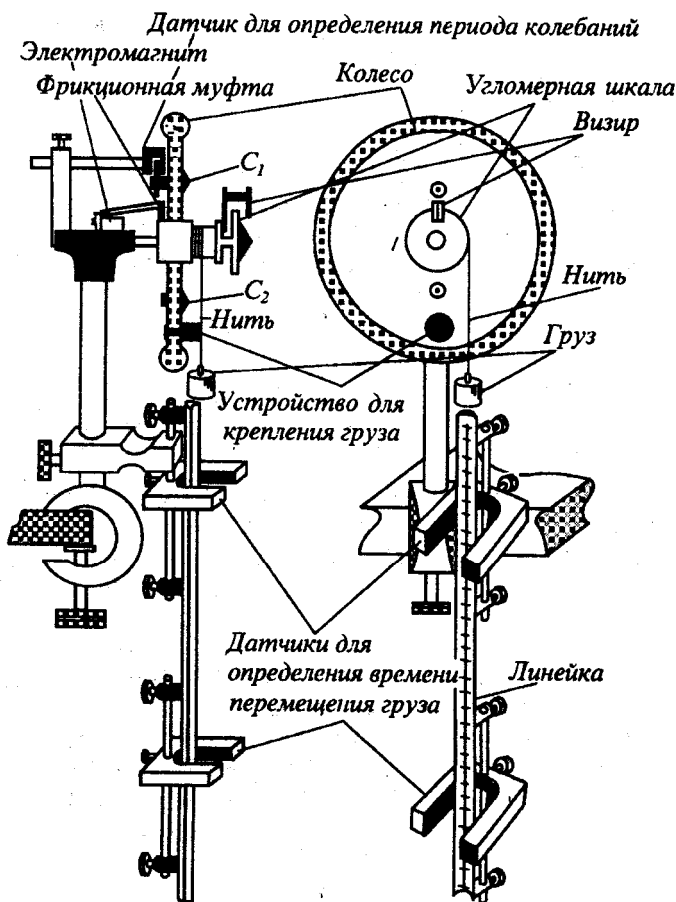


Рис. 14. Блок-схема установки для определения момента инерции колеса

Для регистрации периода колебаний на колесе симметрично расположены два легких одинаковых по массе тела C_1 и C_2 . На теле C_1 закреплена стержень, являющийся составной частью системы измерения периода колебаний. В исходном положении система зафиксирована с помощью фрикционной муфты, управляемой электромагнитом (при таком положении муфты светится лампа индикации на кнопке управления электромагнитом). При выключении электромагнита фрикционная муфта освобождает колесо, и оно начинает движение (колебательное или вращательное). Время колебаний колеса определяется с помощью электронного таймера. Время перемещения груза при вращательном движении колеса определяется с помощью того же таймера, включение и выключение которого в этом случае осуществляется оптическими датчиками. Эти датчики крепятся на кронштейнах и могут фиксироваться на различных высотах. Положение датчиков определяется с помощью линейки (рис. 14).

Запуск таймера в режиме измерения периодов колебаний осуществляется нажатием кнопки "Пуск", остановка — кнопкой "Стоп". При измерении времени опускания груза нажимают на кнопку "Пуск", после чего на индикаторе электронного таймера высвечивается время прохождения груза между двумя датчиками положения. Переключение таймера в тот или иной

режим работы осуществляется тумблером "Колеб.—Вращ.". При подготовке к дальнейшим измерениям результаты предыдущих убираются с табло нажатием кнопки "Сброс".

Проведение эксперимента

Упражнение 1. Определение момента инерции колеса методом колебаний.

Измерения

1. На краю колеса закрепляют устройство для крепления груза, в которое устанавливают груз. Колесо выводят из положения равновесия на угол, не превышающий 10° . Определяют время t_n n полных колебаний ($n = 10 \div 15$). Такие измерения проводят 3—5 раз. Результаты измерений времени заносятся в табл. 4.1.

2. После этого не менее трех раз измеряют расстояние L от оси вращения до центра масс груза (это есть расстояние от оси вращения до центра винта, закрепляющего устройство крепления груза на колесе). Результаты заносят в табл. 4.1.

3. Взвешивают устройство для крепления груза и сам груз. Значения масс этих тел m_k и $m_{гр}$ заносят в табл. 4.1.

Таблица 4.1.

N	n	t_n	T_N	$\langle T \rangle$	S_T	L_N	$\langle L \rangle$	S_L	$m_k, m_{гр}$	J	S_J
1											
2											
3											
4											
5											

Обработка результатов

1. По экспериментальным данным вычислить выборочные средние значения (средние арифметические значения) величин периода T и расстояния L .

2. Вычислить выборочные стандартные отклонения (среднеквадратичные ошибки среднего арифметического) для T и L .

3. По полученным данным, пользуясь уравнением (4.9) и учитывая, что $m = m_k + m_{гр}$, определить момент инерции колеса J .

4. Оценить погрешности для J , используя следующую формулу для расчета погрешностей косвенных измерений:

$$S_J(L, T, m, g) = \sqrt{\left(\frac{\partial J}{\partial L} S_L\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial T} S_T\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial m} S_m\right)^2 + \left(\frac{\partial J}{\partial g} S_g\right)^2}, \quad (4.21)$$

где S_m дана в описании используемых весов, а S_g находится из таблиц физических постоянных.

Упражнение 2. Определение момента инерции колеса методом вращения.

Измерения

1. Снять с колеса устройство для крепления груза.
 2. Измерить время Δt прохождения груза между отметками x_1 и x_2 . Измерения провести не менее 5—7 раз для фиксированных значений x_0 , x_2 и разных x_1 каждый раз занося данные в табл. 4.2. Измеряют также координату x_3 точки, до которой опускается груз при полностью размотанной нити и координату x_4 точки, до которой поднимается груз при дальнейшем наматывании нити на цилиндр, пока колесо продолжает свободно вращаться.

3. Несколько раз измерить радиус r цилиндра, на который наматывается нить и записать результаты.

Таблица 4.2.

N	x_1	x_2	Δt	a_N	$\langle a \rangle$	S_a	x_0	x_3	x_4	$M_{\text{тр}}$	$\langle M \rangle$	S_M
1												
2												
3												
.												

Обработка результатов

1. По формулам (4.17) и (4.20) определить ускорения a_N и моменты сил трения $M_{\text{тр}}$ для каждого измерения. Результаты измерений занести в табл. 4.2.

2. Поскольку a_N и $M_{\text{тр}}$ определяются для различных значений x_1 , то будем считать полученные значения ускорений и моментов сил трения независимыми. Найти выборочные средние значения ускорения и момента сил трения и выборочные стандартные отклонения для этих величин. Результаты вычислений занести в табл. 4.2.

3. Вычислить выборочное среднее значение радиуса цилиндра $\langle r \rangle$ и среднеквадратичную ошибку этой величины.

4. По формуле (4.13) определить значение момента инерции колеса и его погрешность.

Упражнение 3. Прямой расчет момента инерции колеса

Измерения

Используемое в установке колесо можно представить как совокупность тел простой формы (рис. 15): диска радиуса R_1 , толщины l_1 ; обода

толщины l_2 , с внешним и внутренним радиусами R_2, R_1 ; двух малых тел C_1 и C_2 , расположенных на расстоянии R_3 от оси; цилиндра, имеющего радиус R_4 и толщину l_3 . Для всех этих тел момент инерции можно рассчитать.

Известно, что момент инерции диска массы m_d относительно оси равен (см. Приложение 4)

$$J_d = \frac{1}{2} m_d R_1^2, \quad (4.22)$$

а для обода массы $m_{об}$ (см. Приложение 5)

$$J_{об} = \frac{1}{2} m_{об} (R_1^2 + R_2^2). \quad (4.23)$$

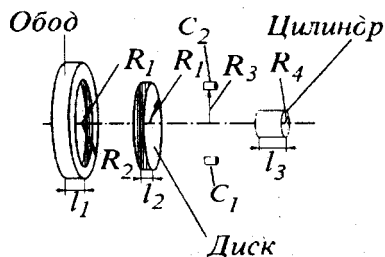


Рис. 15. Схематическое представление колеса в виде совокупности тел простой формы

Учитывая, что диск, обод и цилиндр сделаны из одного материала с плотностью ρ , получаем окончательно выражение для момента инерции колеса

$$J = \frac{1}{2} \pi \rho l_1 R_1^4 + \frac{1}{2} \pi \rho l_2 (R_2^4 - R_1^4) + \frac{1}{2} \pi \rho l_3 R_4^4 + m_C R_3^2, \quad (4.24)$$

где m_C — суммарная масса тел C_1 и C_2 .

С помощью штангенциркуля и линейки определяют геометрические размеры каждой выделенной части колеса по несколько раз. Результаты измерений заносят в таблицу 4.3.

Таблица 4.3

N	1	2	3	4	5
R_{1n}					
$\langle R_1 \rangle$					
S_{R_1}					
R_{2n}					
$\langle R_2 \rangle$					
S_{R_2}					
R_{3n}					
$\langle R_3 \rangle$					
S_{R_3}					
R_{4n}					
$\langle R_4 \rangle$					
S_{R_4}					

Продолжение табл. 4.3

N	1	2	3	4	5
l_{1n}					
$\langle l_1 \rangle$					
S_{l_1}					
l_{2n}					
$\langle l_2 \rangle$					
S_{l_2}					
l_{3n}					
$\langle l_3 \rangle$					
S_{l_3}					

Обработка результатов

1. Определяют средние арифметические значения $R_1, R_2, R_3, R_4, l_1, l_2, l_3$. Результаты заносят в таблицу 4.3.
2. Вычисляют выборочные стандартные отклонения для этих величин. Результаты заносят в таблицу 4.3.
3. По формуле (4.24) рассчитывают значение момента инерции колеса и определяют погрешность.
4. Рассчитанное значение момента инерции колеса сравнивают со значениями, полученными экспериментально в упражнениях 1 и 2.

Основные итоги работы

В процессе выполнения работы должен быть определен момент инерции колеса двумя способами. Следует сопоставить эти результаты с величиной вычисленного по (4.24) момента инерции.

Контрольные вопросы

1. Что такое главные оси инерции? Центральные оси? Привести примеры.
2. Что такое момент инерции тела относительно закрепленной оси?
3. Чему равны моменты инерции следующих тел: тонкая палочка, тонкий диск, тонкие прямоугольная и треугольная пластины, цилиндр, шар, параллелепипед? Как их получить?
4. Сформулируйте теорему Гюйгенса—Штейнера.

Литература

1. Алешкевич В.А., Деденко Л.Г., Караваев В.А. Механика твердого тела. Лекции (Университетский курс общей физики). М.: Изд-во физического факультета МГУ, 1998.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. Том I. Механика. Изд. 3-е. М.: Наука, 1989. гл.V.