



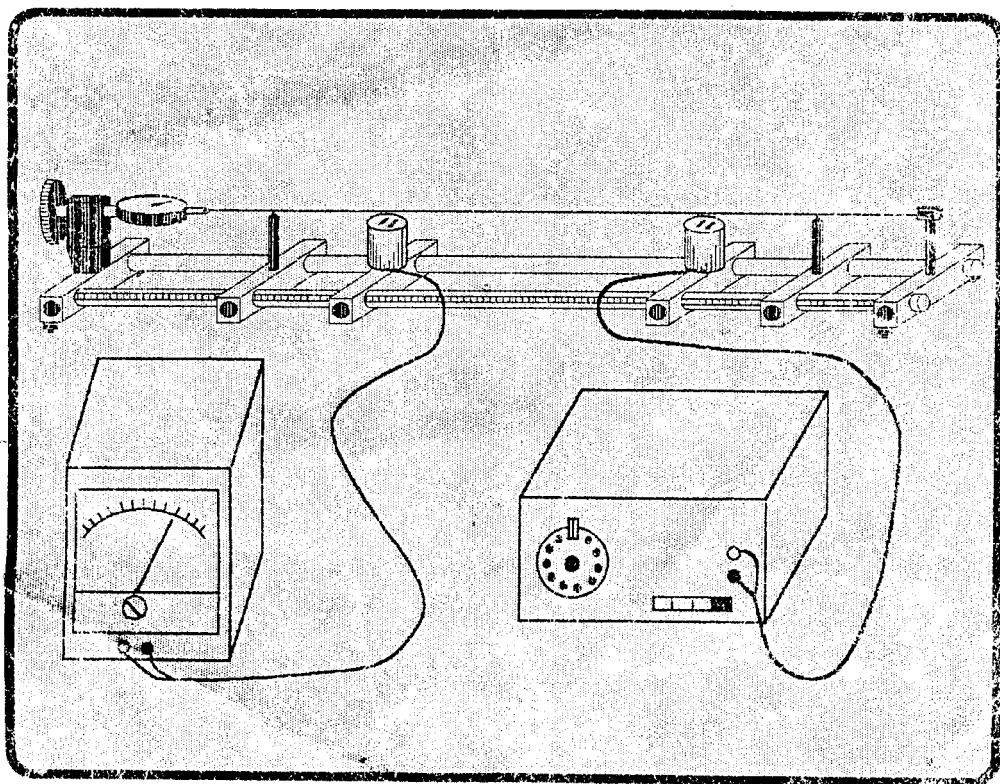
## Лабораторный практикум

# МЕХАНИКА

№ 31

Р.Н. Лазаренко, А.М. Салецкий,  
А.И. Слепков, А.В. Червяков

## ИССЛЕДОВАНИЕ СОБСТВЕННЫХ КОЛЕБАНИЙ В РАСПРЕДЕЛЕННОЙ СИСТЕМЕ



## Цель работы

*Изучение собственных колебаний в распределенной системе.*

## Идея эксперимента

Колебания в распределенных системах рассматриваются на примере колебаний стальной струны, натянутой между двумя неподвижными зажимами. Определяются частоты собственных колебаний стальной струны в зависимости от ее натяжения и длины. Для наблюдения колебаний используется электромагнитный датчик.

## Теория

Распределенные колебательные системы обладают бесконечным числом степеней свободы, поэтому для описания произвольных движений в таких системах в общем случае необходимо использовать бесконечное число параметров.

Любое возмущение, возникающее в среде всегда передается соседним частицам, т.е. возмущения среды не могут быть локализованы в одной точке. Колебание в одной точке пространства приводит к возникновению волнового процесса—распространению колебаний в пространстве. Очевидно, что в безграничной среде невозможны свободные колебания (без участия внешнего источника) с амплитудой, отличной от нуля. Иная картина наблюдается в ограниченных системах когда в них отсутствует затухание. В таких системах может существовать дискретный набор собственных колебаний.

В качестве примера рассмотрим колебания струны, натянутой между двумя неподвижными зажимами. В результате произвольного возмущения струны, например, удара, ее точки начинают совершать колебания около своих положений равновесия. В этом случае говорят, что струна совершает собственные колебания, поскольку они происходят под действием только внутренних сил системы—сил натяжения. Колебания струны полностью описываются положениями ее точек в каждый момент времени.

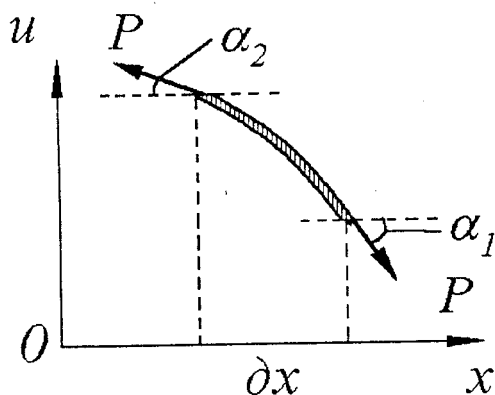
Смещения точек струны удобно описывать вектором смещения  $\vec{u}(x, t)$ , имеющим в общем случае три компоненты  $u_x(x, t)$ ,  $u_y(x, t)$ ,  $u_z(x, t)$ , которые определяют профиль струны в произвольный момент времени. Мы будем рассматривать наиболее простой случай, когда все смещения струны происходят в одной плоскости, и вектор смещения описывается одной функцией:  $u_y(x, t) \equiv u(x, t)$ , характеризующей вертикальные отклонения струны.

Предположим, что струна является идеальной—упругой и достаточно тонкой, а амплитуда колебаний каждой точки струны мала. Будем считать также, что натяжение струны  $P$  во всех точках одинаково. На некоторый участок струны длиной  $\delta l$  действуют силы упругости со стороны соседних участков (рис. 1) уравнение движения выделенного участка имеет вид

$$\delta m \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \cdot (\sin(\alpha_1) - \sin(\alpha_2))$$

где  $\delta m$  — масса выделенного участка струны,  $u$  — его отклонение от положения равновесия.

Поделим правую часть на  $\delta x = \delta l \cdot \cos \alpha$ , где  $\delta l$  — длина участка струны, а затем умножим на эту же величину. Учитывая, что  $\operatorname{tg} \alpha = \frac{\partial u}{\partial x}$ , а

Рис.1. Силы, действующие на участок струны  $\delta l$ 

отношение  $\frac{\delta m}{\delta l}$  является погонной плотностью струны  $\rho$ , получаем для малых отклонений ( $\cos \approx 1$ )

$$\rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = P \cdot \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

или

$$\frac{d^2 u}{dt^2} = v^2 \cdot \frac{d^2 u}{dx^2}, \quad (1)$$

где

$$v^2 = \frac{P}{\rho}. \quad (2)$$

Уравнение (1) называется волновым уравнением. Решением этого уравнения являются произвольные функции вида

$$f_1\left(t - \frac{x}{c}\right), f_2\left(t + \frac{x}{c}\right),$$

или суперпозиция этих функций. Действительно, после подстановки, например функции  $f_1\left(t - \frac{x}{c}\right)$  в исходное уравнение получаем

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} = v^2 \cdot \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{\partial f_1}{\partial \left(t - \frac{x}{v}\right)^2}.$$

Предположим, что некоторая точка струны с координатой  $x=0$  начинает двигаться по закону  $u(0,t)=f_1(t)$ . Это возмущение будет распространяться вдоль струны и в некоторой точке струны с координатой  $x'$  в некоторый момент времени  $t'$  будет точно таким же, если выполняется соотношение

$$t' - \frac{x'}{v} = t, \text{ то есть } \frac{x'}{t' - t} = v.$$

Следовательно, величина  $v$  является скоростью распространения возмущения вдоль струны. При этом функции вида  $f_1\left(t - \frac{x}{v}\right)$  описывают импульс, распространяющийся вправо, а  $f_2\left(t + \frac{x}{v}\right)$  — влево.

Для анализа возможных колебаний в струне рассмотрим распространение отдельного импульса смещения (рис.2) более детально. Пусть в начальный момент времени импульс находится в точке  $x_0$  и распространяется в сторону, указанную стрелкой. В момент времени  $t_1$  импульс отразится от точки закрепления ( $x=L$ ), причем его смещение поменяет знак, так как в точке закрепления всегда  $u(L,t)=0$ , затем импульс достигает противоположной точки закрепления ( $t=t_2, x=0$ ), снова отразится и при  $t=t_3$  займет первоначальное положение.

В рассмотренном примере все точки струны будут совершать одинаковые движения с периодом  $T=t_3-t_0$ , то есть  $u(x,t)=u(x,t+T)$ . При этом считается, что каждая точка струны смещается только в поперечном направлении и не смещается в продольном. Очевидно, что период  $T$  связан со скоростью распространения импульса смещения  $v$  соотношением

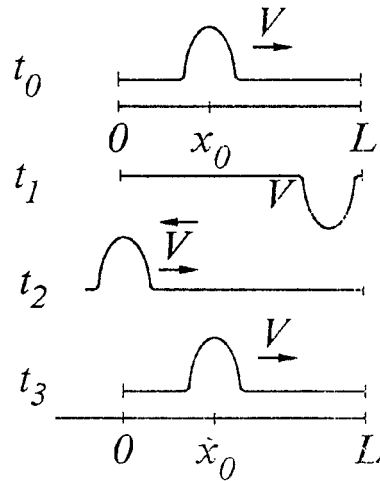


Рис. 2. Распространение импульса смещения вдоль струны

$$T = \frac{2L}{v} \quad (3)$$

Отметим, что периодические движения точек струны будут происходить и при последовательности возмущающих импульсов. Поэтому период, определенный из (3) для одиночного импульса, будет наибольшим возможным периодом колебаний.

Покажем, что это условие можно получить из волнового уравнения. Предположим, что одна из точек струны (с координатой  $x=x_0$ ) под действием внешней силы совершает колебания по гармоническому закону. То есть, будут выполнены следующие условия

$$u(x_0, t) = u_{00} \cos \omega t, \quad (4)$$

$$u(0, t) = 0, \quad (5)$$

$$u(L, t) = 0, \quad (6)$$

$\omega$  — циклическая частота внешней силы.

Возмущение от колеблющейся точки закрепления будет распространяться по струне в обе стороны со скоростью  $v$ . Через некоторое время в

струне установятся две бегущие во встречных направлениях волны  $u^+(x,t) = u_0^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x + \theta_0^+\right)$  и  $u^-(x,t) = u_0^- \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v}x + \theta_0^-\right)$ . Граничное условие на закрепленном конце струны имеет вид

$$\begin{aligned} u(L,t) &= u^+(L,t) + u^-(L,t) = \\ &= u_0^+ \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}L + \theta_0^+\right) + u_0^- \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v}L + \theta_0^-\right) = 0 \end{aligned} \quad (7)$$

Так как это условие должно выполняться в любой момент времени, то

$$u_0^+ = u_0^- = u_0,$$

а аргументы косинусов должны различаться на  $(2k+1)\pi$ .

Из (7) следует

$$2u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\theta_0^+ + \theta_0^-}{2}\right) \cos\left(\frac{\omega}{v}L + \frac{\theta_0^- - \theta_0^+}{2}\right) = 0, \quad (8)$$

то есть

$$\frac{\omega}{v}L + \frac{\theta_0^+ - \theta_0^-}{2} = \frac{\pi}{2} (2k + 1), \quad (9)$$

где  $k=1, 2, \dots$ .

Для другой точки закрепления

$$\begin{aligned} u(0,t) &= u^+(0,t) + u^-(0,t) = \\ &= u_0^+ \cos(\omega t + \theta_0^+) + u_0^- \cos(\omega t + \theta_0^-) = 0. \end{aligned} \quad (10)$$

Отсюда следует, что

$$2u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\theta_0^+ + \theta_0^-}{2}\right) \cos\left(\frac{\theta_0^- - \theta_0^+}{2}\right) = 0 \quad (11)$$

и

$$\frac{\theta_0^- - \theta_0^+}{2} = \frac{\pi}{2}. \quad (12)$$

Из (9) и (12) следует, что устойчивые колебания в струне возможны при условии

$$\frac{\omega}{v}L = \pi k, \quad (13)$$

где  $k=1, 2, \dots$ . При  $k=1$  это условие полностью соответствует (3).

Определим амплитуду  $u_0$ . Для этого воспользуемся условием (4)

$$u(x,t) = u_0 \cos\left(\omega t - \frac{\omega}{v}x_0 + \theta_0^+\right) + u_0 \cos\left(\omega t + \frac{\omega}{v}x_0 + \theta_0^-\right) = u_{00} \cos \omega t.$$

Проводя тригонометрические преобразования и учитывая (12) и (13), получаем

$$u_0 = \frac{u_{00}}{2 \cos\left(\frac{\omega}{v} x_0 + \frac{\pi}{2}\right)}. \quad (14)$$

То есть при  $x$ , удовлетворяющих выражению  $\frac{\omega}{v} x_0 = \pi n$ , где  $n = 1, 2, 3, \dots$  это отношение будет стремиться к бесконечности. Реально из-за потерь амплитуда колебаний, конечно, не будет бесконечно большой. При выполнении условия (13) каждая точка струны будет совершать движение по закону

$$u(x, t) = u^+(x, t) + u^-(x, t) = 2u_0 \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right) \cos(\omega t) \quad (15)$$

Такое движение является колебательным с амплитудой

$$u(x) = 2u_0 \sin\left(\frac{\omega}{v} x\right). \quad (16)$$

Точки, в которых амплитуда колебаний равна нулю называются узлами, а там, где амплитуда достигает максимальных значений называются пучностями. Очевидно (см. (14)), что для достижения максимальных амплитуд колебаний струны внешний источник нужно помещать в узел.

В общем случае в гибкой однородной струне, натянутой между двумя точками могут наблюдаться колебания различного вида. Наибольший интерес представляет рассмотренный нами случай, когда все точки струны совершают гармонические колебания. Такие собственные колебания струны получили название нормальных колебаний. Любое собственное колебание может быть однозначно представлено как суперпозиция (сумма) нормальных колебаний с определенными частотами. При возбуждении нормальных колебаний вдоль струны устанавливаются стоячие волны, причем на концах струны в соответствии с (5), (6) всегда имеем узел смещения, а вдоль струны укладывается целое число длин стоячих волн

$$n \frac{\lambda_n}{2} = L, \quad (17)$$

где  $n = 1, 2, 3, \dots$ ,  $\lambda_n$  — длина бегущей волны. Для всех рассматриваемых колебаний скорость распространения импульса по струне одинакова, а частоты нормальных колебаний различны. Так как длина волны связана со скоростью ее распространения  $v$  и частотой  $\nu$  соотношением  $\lambda \nu = v$ , то

$$v = \frac{2L}{n} \nu_n. \quad (18)$$

Струна, следовательно, может колебаться не с одной частотой, а с целым спектром частот, учитывая (2) получаем окончательное выражение для частот нормальных колебаний струны

$$\nu_n = \frac{n}{2L} \sqrt{\frac{P}{\rho}}. \quad (19)$$

На рис. 3 представлены типичные зависимости квадрата частот колебаний струны от силы натяжения для различных гармоник  $n$ . Наблюдение собственных свободных колебаний струны затруднено, так как они относительно быстро затухают. Поэтому в работе рассматриваются

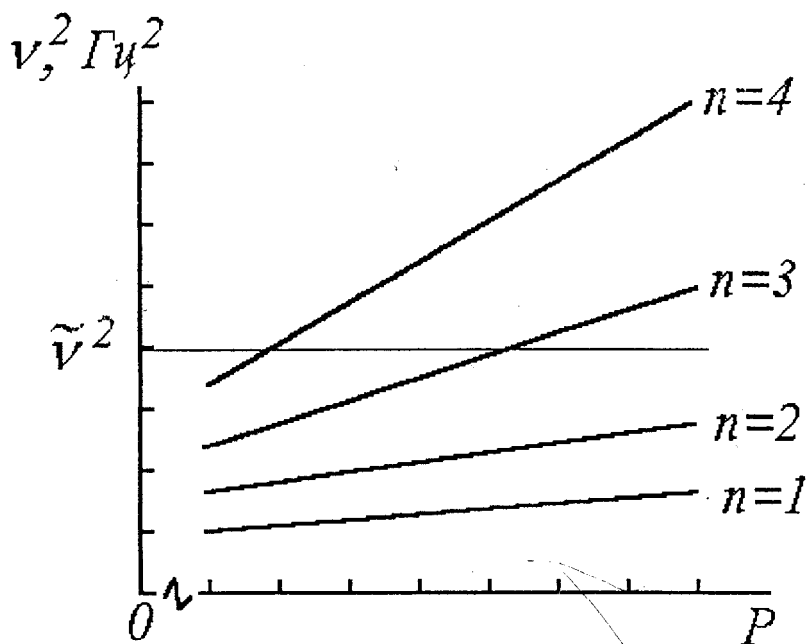


Рис. 3. Зависимости квадрата частот колебаний струны от силы натяжения для различных гармоник

колебания, возбуждаемые постоянно действующей периодической вынуждающей силой.

### Экспериментальная установка

Установка (рис. 4) состоит из металлической рамы, состоящей из двух направляющих труб (1) закрепленных на определенных расстояниях с помощью брусков (2). На одном из брусков (2) установлена стойка (3) предназначенная для закрепления одного конца струны (4). На другом бруске (2) установлено устройство А, служащее для изменения натяжения струны и состоящее из пружинного динамометра (5) и узла его перемещения (6). К пружине динамометра закреплен другой конец струны (4). Сила натяжения изменяется ручкой (7), а измеряется пружинным динамометром (5). На направляющих трубах (2) укрепляются на определенных расстояниях бруски с установленными на них элементами. Стойками (8) устанавливается рабочая длина струны (4). Длина струны между двумя закрепленными ее концами, равная расстоянию между стойками (8) измеряется линейкой (9), находящейся на одной из труб. Колебания струны возбуждаются с помощью электромагнитного вибратора (10), питаемого переменным током от генератора (11), который имеет встроенный частотомер. Электромагнитный вибратор (10) заставляет струну совершать вынужденные колебания с частотой генератора (11). Амплитуда колебаний регистрируется электромагнитным датчиком (12), соединенным с вольтметром (13). При этом амплитуда колебания струны пропорциональна показанию вольтметра (13). Величина сигнала выдаваемого электромагнитным датчиком зависит от его расстояния до струны. Поэтому для регулировки чувствительности датчика (12) предусмотрено изменение расстояния от датчика до струны. Это изменение осуществляется с помощью винта (14). Аналогичное устройство используется для регулировки

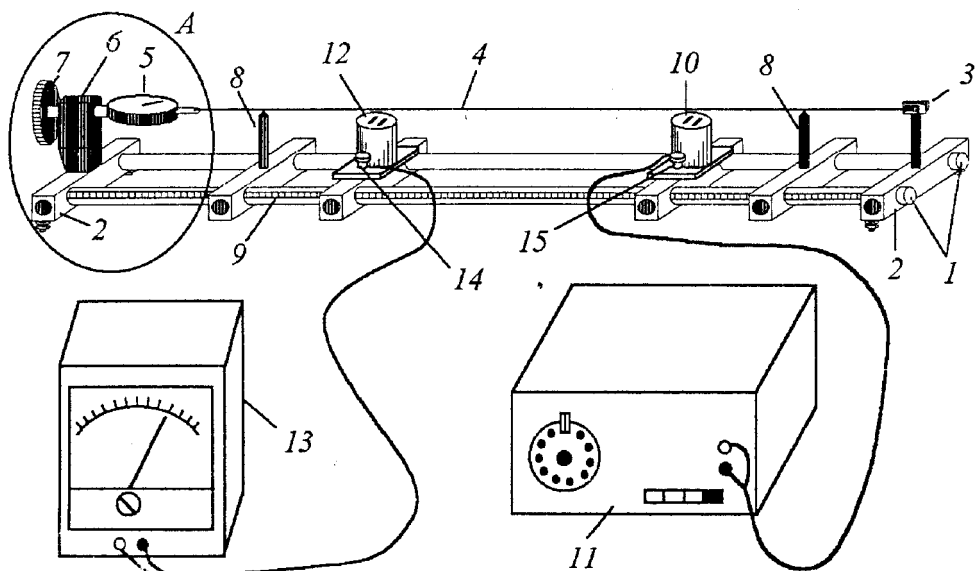


Рис.4. Блок-схема экспериментальной установки

расстояния между вибратором и струной. Расстояние между струной и вибратором меняется с помощью винта (15), при этом изменяется амплитуда вынужденных колебаний струны.

### Проведение эксперимента

*Упражнение 1.* Установление зависимости частот собственных колебаний от силы натяжения струны.

Сила натяжения  $P$  определяет скорость распространения возмущения вдоль струны (2) и, следовательно, частоту собственных колебаний (19). В этом упражнении экспериментально определяется характер зависимости  $\nu_n$  от силы натяжения струны  $P$ .

#### Измерения

1. Стойками (8) установите максимальную кратную 10 см длину струны. Натяните струну с силой 2 кГс (1 кГс=9.8 Н). Вибратор установите в положение, отстоящее на 10 см от закрепленного конца струны. Установите датчик приблизительно в 10 см от середины струны.

2. Изменяя частоту генератора ручкой "грубо" (начиная от нулевого значения по его шкале) зафиксируйте максимальное отклонение стрелки вольтметра, регистрирующего амплитуду колебаний струны. При этом частота колебаний струны, установленная по шкале встроенного в генератор частотомера, есть "грубое" значение экспериментально установленной резонансной частоты. Для определения точного величины  $\nu_{\text{эксп}}$  воспользуйтесь шкалой "плавно" генератора. Поворачивая вправо или влево ручку генератора "плавно" добейтесь максимального отклонения стрелки вольтметра (если при этом стрелка выходит за предел шкалы, увеличивайте диапазон измерений вольтметра ручкой "диапазон"). Запишите показание встроенного частотомера. Это значение соответствует резонансной частоте.

3. Установите какой из-гармоник соответствует данное колебание. Для этого не меняя частоты генератора перемещая датчик вдоль струны, определите количество узловых точек (при нахождении датчика под



узловой точкой его сигнал равен нулю). Номер гармоники  $n$  колебания определяется по формуле  $n = N + 1$ , где  $N$ —число узлов (не считая точек закрепления).

4. Увеличивая частоту колебаний струны описанным выше образом, установите резонансные частоты для последующих четырех гармоник. Экспериментально установленные значения  $\nu_{\text{эксп}}$  занесите в табл.1.

5. Установите значения нормальных колебаний пяти первых гармоник для различных значений натяжения струны  $P$ . Для этого в области частот нормальных колебаний для соответствующих гармоник, установите частоты при которых наблюдаются максимальные колебания (по вольтметру) струны для сил ее натяжения равных 2, 3, 4, 5, 6 и 7 кгс. Экспериментально установленные значения  $\nu_{\text{эксп}}$  занесите в табл.1.

### Обработка результатов

1. С помощью выражения (19) определите теоретические значения частот  $\nu_{\text{теор}}$  нормальных колебаний для пяти первых гармоник при натяжениях струны равных 2, 3, 4, 5, 6 и 7 кгс. Результаты расчетов внесите в табл.1.

2. Постройте теоретические зависимости квадрата частоты  $\nu_{\text{теор}}^2$  колебаний от силы натяжения  $P$  для пяти первых гармоник колебаний. Она должны быть подобны показанным на рис.3.

3. Отметьте на теоретических зависимостях квадраты экспериментально установленных значений частот пяти первых гармоник нормальных колебаний для разных величин  $P$ . Проведите сравнение экспериментальных и теоретических значений  $\nu_n^2$  для нормальных колебаний.

Таблица 1

| P, кгс | 1-я гармоника       |                     | 2-я гармоника       |                     | 3-я гармоника       |                     | 4-я гармоника       |                     | 5-гармоника         |                     |
|--------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|        | $\nu_{\text{эксп}}$ | $\nu_{\text{теор}}$ | $\nu_{\text{эксп}}$ | $\nu_{\text{теор}}$ | $\nu_{\text{эксп}}$ | $\nu_{\text{теор}}$ | $\nu_{\text{эксп}}$ | $\nu_{\text{теор}}$ | $\nu_{\text{эксп}}$ | $\nu_{\text{теор}}$ |
| 2      |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |
| 3      |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |
| 4      |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |
| 5      |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |
| 6      |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |
| 7      |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |                     |

**Упражнение 2.** Определение зависимости номера гармоники колебания от натяжения струны.

Из рис.3 видно, что значение  $\nu^2$  (а следовательно и частоты нормальных колебаний) для разных гармоник могут принимать одинаковые значения при определенных величинах силы натяжения струны  $P$ . Поэтому меняя силу натяжения струны можно наблюдать различные гармоники нормальных колебаний на одной и той же частоте. В данном упражнении за счет изменения силы натяжения струны проводят наблюдение различных гармоник нормальных колебаний на одной и той же частоте.

*Измерения*

1. Натяните струну с силой 2 кгс и найдите 5-ю гармонику по методике описанной в упр. 1.

2. Не меняя частоты генератора и увеличивая натяжение струны определяют значения  $P$ , при которых наблюдаются максимальные значения амплитуд колебаний. По методике, описанной в упр.1 устанавливают число узловых точек и соответственно номера гармоник для данных нормальных колебаний.

3. Найденные значения сил натяжения и соответствующие им номера гармоник занесите в табл. 2

Таблица 2

| Номер гармоники | Сила натяжения струны |
|-----------------|-----------------------|
| 1               |                       |
| 2               |                       |
| 3               |                       |
| 4               |                       |
| 5               |                       |

*Обработка результатов*

Постройте график зависимости  $n$  от  $P$ .

**Упражнение 3. Определение зависимости частот собственных колебаний от длины струны.**

*Измерения*

1. Установите силу натяжения струны 3кГс.

2. Используя методику, описанную в упр.1 определите значения частот 1 и 2 гармоник собственных колебаний. Результаты занесите в табл.3.

3. Изменяя длину струны (уменьшая каждый раз ее длину примерно на 20%) определите значения частот 1 и 2 гармоник ее собственных колебаний. Результаты эксперимента занесите в табл.3.

Таблица 3

| L, см | $\frac{1}{L}$ , см <sup>-1</sup> | 1-я гармоника       |                     | 2-я гармоника       |                     |
|-------|----------------------------------|---------------------|---------------------|---------------------|---------------------|
|       |                                  | $\nu_{\text{эксп}}$ | $\nu_{\text{теор}}$ | $\nu_{\text{эксп}}$ | $\nu_{\text{теор}}$ |
|       |                                  |                     |                     |                     |                     |
|       |                                  |                     |                     |                     |                     |
|       |                                  |                     |                     |                     |                     |
|       |                                  |                     |                     |                     |                     |

*Обработка результатов*

1. С помощью выражения (19) определите теоретические значения частот 1 и 2 гармоник собственных колебаний струны при тех ее длинах, для которых получены экспериментальные результаты. Результаты занесите

в табл.3.

2. Постройте теоретические зависимости  $\nu_{1,2}$  от величины, обратной длине струны  $\frac{1}{L}$ .

3. Отметьте на теоретических зависимостях экспериментально установленные значения частот 1 и 2 гармоник нормальных колебаний для разных значений  $\frac{1}{L}$ . Проведите сравнение экспериментальных и теоретических значений  $\nu_{1,2}$  для нормальных колебаний.

### Основные итоги работы.

*В ходе работы должны быть экспериментально получены зависимости частот собственных колебаний струны от силы натяжения и длины. Результаты должны быть сопоставлены с теоретически рассчитанными зависимостями для известной линейной плотности струны.*

### Контрольные вопросы

1. Что такое свободные, вынужденные, собственные и нормальные колебания системы?
2. Сколько степеней свободы имеет натянутая струна, сколько нормальных колебаний в ней может быть возбуждено?
3. Вывести волновое уравнение.
4. Вывести связь между частотой нормального колебания, длиной струны и скоростью распространения волны в струне.
5. Что происходит в струне, когда частота внешнего сигнала выбрана произвольно (не обязательно равной одной из собственных частот)?

### Литература

1. Стрелков С.П. Механика, М. Наука, 1975, гл.15, §143.
2. Сивухин Д.В. Общий курс физики. т.1. Механика. М. Наука, 1989, §84.

25-900  
0,15-X