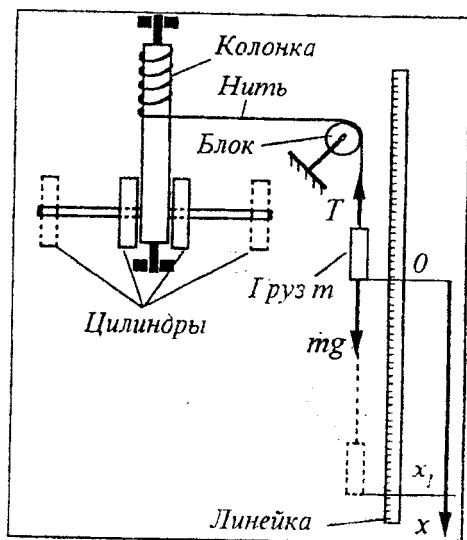




Лабораторный практикум  
по ФИЗИКЕ

МЕХАНИКА  
Задача № 172

ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ  
МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ



# ПРОВЕРКА ЗАКОНА СОХРАНЕНИЯ МОМЕНТА КОЛИЧЕСТВА ДВИЖЕНИЯ

## Цель работы

Проверка закона сохранения момента количества движения (импульса).

## Идея эксперимента

В эксперименте используется система тел, у которой в процессе движения может меняться конфигурация и, следовательно, ее момент инерции.

## Теоретическое введение

Закон сохранения момента количества движения (импульса) для системы тел является следствием 2-го и 3-го законов Ньютона в инерциальной системе отсчета. Для системы тел, способной вращаться вокруг некоторой закрепленной оси, он заключается в том, что суммарный момент импульса системы тел относительно этой оси сохраняется неизменным, если суммарный момент всех внешних сил относительно этой же оси равен нулю. Для абсолютно твердого тела

$$J\omega = \text{const},$$

где  $J$  — момент инерции системы тел,  $\omega$  — угловая скорость вращения.

Рассмотрим движение системы тел, у которой в процессе движения может меняться момент инерции. Примером такой механической системы служит колонка с горизонтальным стержнем, по которому могут свободно перемещаться два цилиндра (рис. 1). Эта колонка может вращаться вокруг своей оси.

Для осуществления такого вращения на нее наматывается нить, переброшенная через дополнительный блок. На конце нити подвешен груз массы  $m$ . В исходном состоянии эта нить намотана на колонку, груз находится в верхнем положении, а цилиндры удерживаются на минимальном расстоянии от оси.

Для определенности выберем систему координат так, как показано на рис. 1, совместив ее начало с положением груза в верхней точке. Все

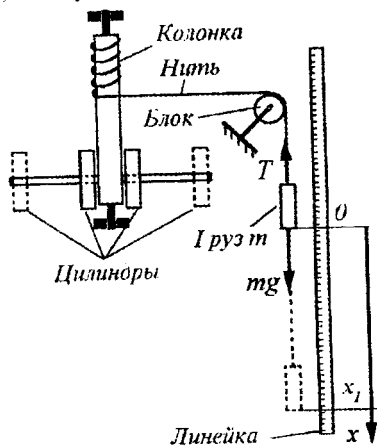


Рис. 1. Схематическое представление механической системы с меняющимся моментом инерции

время движения рассматриваемой механической системы с меняющимся моментом инерции может быть разбито на три стадии. На первой, система, имея наименьший момент инерции, начинает вращаться с ускорением под действием момента силы натяжения нити, на которой подвешен груз  $m$ . На второй, когда груз полностью опускается (до координаты  $x_1$ ), цилиндры освобождаются и меняют свое положение (на рис. 1 новое положение отмечено штриховыми линиями). Момент инерции системы тел в этой стадии быстро увеличивается и становится наибольшим, а угловая скорость вращения уменьшается. В третьей стадии система, имея наибольший момент инерции, вращается замедленно и останавливается. При этом груз  $m$  поднимется до координаты  $x_2$ .

Изменение угловой скорости вращения системы со временем может быть изображено примерно так, как показано на рис. 2. Возрастающая ветвь от нуля до точки  $A$  отвечает первой стадии. Убывающая ветвь, от точки  $B$  до точки  $C$ , отвечает третьей стадии. За незначительное время  $\tau$  в интервале  $(t_A, t_B)$ , угловая скорость быстро уменьшается.

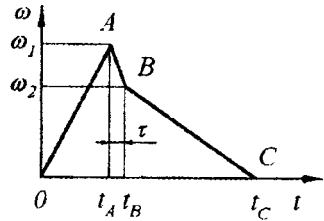


Рис. 2. Зависимость угловой скорости колонки от времени

Участок кривой  $AB$  соответствует второй стадии, стадии увеличения момента инерции системы. В связи с тем, что время  $\tau$  мало, момент силы натяжения нити за это время не успевает заметно изменить момент количества движения колонки. Применяя к этой стадии закон сохранения момента количества движения получим

$$J_1 \omega_1 = J_2 \omega_2, \quad (1)$$

или

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{\omega_2}{\omega_1}, \quad (2)$$

где  $J_1$  и  $J_2$  — соответственно наименьший и наибольший моменты инерции системы,  $\omega_1$  — наибольшая угловая скорость на первой стадии движения,  $\omega_2$  — наибольшая угловая скорость в третьей стадии движения.

Выразим величины, входящие в уравнения (1) и (2), через другие параметры системы с изменяющимся значением момента инерции. Для определения угловых скоростей вращения колонки  $\omega_1$  и  $\omega_2$  воспользуемся законом сохранения энергии. При опускании груза (при этом цилиндры находятся около колонки) имеем:

$$0 = \frac{1}{2} J_1 \omega_1^2 + \frac{m v_1^2}{2} + A_1 + mg(-x_1), \quad (3)$$

где  $g$  — ускорение свободного падения,  $x_1$  — координата груза в нижней точке,  $A_1 < 0$  — работа сил трения при опускании груза,  $v_1 = \omega_1 r$  — скорость груза в нижней точке, равная ( $r$  — радиус колонки),  $\frac{1}{2} J_1 \omega_1^2$  — кинетическая энергия вращения колонки в момент  $t_A$  (рис. 2).

Из уравнения (3) при  $m v_1^2 \ll J_1 \omega_1^2$  получаем:

$$\omega_1 = \sqrt{\frac{2(mgx_1 + A_1)}{J_1}}. \quad (4)$$

После полного разматывания нити цилиндры переходят в крайние положения. Момент инерции колонки увеличивается и становится равным  $J_2$ , угловая скорость вращения уменьшается и становится равной  $\omega_2$ . При разлете цилиндров, во время их удара о крайние упоры часть механической энергии системы тел переходит в тепло, поэтому кинетическая энергия вращения  $\frac{1}{2} J_2 \omega_2^2$  (в момент времени  $t_B$ ) меньше.

Закон изменения энергии на участке  $BC$  (см. рис. 2) запишем в виде

$$A_2 = mg(-x_2) - \left[ \frac{1}{2} J_2 \omega_2^2 + mg(-x_1) \right], \quad (5)$$

где  $A_2 < 0$  — работа сил трения при подъеме груза.

Из последнего уравнения получим:

$$\omega_2 = \sqrt{2 \frac{mg(x_1 - x_2) - A_2}{J_2}}. \quad (6)$$

Определение моментов инерции для двух конфигураций системы может быть осуществлено двумя способами. В первом фиксируют цилиндры в одном из положений и анализируют движение тел системы при опускании груза  $m$ . При движении с неизменным наименьшим моментом инерции  $J_1$  (цилиндры расположены вблизи оси колонки) имеем уравнение движения груза  $m$

$$m \frac{dv}{dt} = mg - T, \quad (7)$$

уравнение вращательного движения колонки

$$J_1 \frac{d\omega}{dt} = Tr - M_{тр}. \quad (8)$$

уравнение кинематической связи

$$\frac{dv}{dt} = \frac{d\omega}{dt} \cdot r. \quad (9)$$

где  $\frac{dv}{dt}$  — ускорение груза на нити.  $T$  — натяжение нити.  $\frac{d\omega}{dt}$  — угловое ускорение системы.  $M_{тр}$  — момент сил трения. Из уравнений (7), (8) и (9) имеем  $(J_1 + mr^2) \frac{dv}{dt} = mgr^2 - M_{тр} \cdot r$ .

Предполагая, что  $M_{тр} \ll mgr$  и  $mr^2 \ll J_1$ , получаем  $J_1 \frac{dv}{dt} = mgr_1^2$ .

В связи с тем, что движение груза равноускоренное,  $\frac{dv}{dt} = 2 \frac{x_1}{t_1^2}$ ,

где  $t_1$  — время опускания груза в том случае, когда момент инерции колонки неизменен и равен  $J_1$ . Из двух последних уравнений получим

$$J_1 = \frac{mgr^2 t_1^2}{2x_1}. \quad (10)$$

Аналогично при движении системы с неизменным наибольшим моментом инерции имеем

$$J_2 = \frac{mgr^2 t_2^2}{2x_1}, \quad (11)$$

где  $t_2$  — время опускания груза на полную длину нити до отметки  $x_1$ .

Используя (4), (6), (10) и (11) можно проверить соотношение (1). При проверке закона сохранения момента количества движения с использованием соотношения (2) отношение моментов инерции  $J_1/J_2$  можно найти, определяя периоды колебаний крутильного маятника, образованного колонкой с навитой нитью и двумя пружинками с коэффициентом жесткости  $k$  (рис. 3). Периоды колебаний такого маятника легко получить, записав уравнение колебаний. Для моментов инерции  $J_1$  и  $J_2$  периоды колебаний равны соответственно

$$T_1 = 2\pi \sqrt{\frac{J_1}{2kr^2}} \quad \text{и} \quad T_2 = 2\pi \sqrt{\frac{J_2}{2kr^2}}. \quad (12)$$

Как видим

$$\frac{J_1}{J_2} = \frac{T_1^2}{T_2^2}. \quad (13)$$

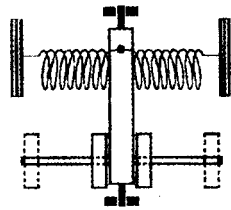


Рис. 3. Устройство крутильного маятника

## Экспериментальная установка

Схема установки дана на рис. 4. Колонка с закрепленной на ней штангой *ВВ* может вращаться в подшипниках вокруг вертикальной оси. По штанге могут скользить два цилиндра одинаковой массы. По колонке может перемещаться кольцо с пластинкой. Если подвесить пластинку в верхнем положении на фиксаторе, то нитями, пропущенными через отверстия в диске, цилиндры в положении, наиболее близком к оси. Фиксатор изготовлен в виде стерженька, вставленного в отверстие в колонке. На один конец стерженька надевается пластинка, к другому концу прикреплена переброшенная через блок нить с грузом массы  $m$  на конце. Нить навивают виток к витку на колонку, охватывая закрепленную на фиксаторе пластинку. Опускаясь, груз приводит колонку во вращение. В момент, когда груз останавливается, он смещает стерженек, кольцо падает на диск и цилиндры освобождаются.

Малая сила трения покоя между цилиндрами и штангой не может удерживать цилиндры в одном положении, и они очень быстро (мгновенно) соскальзывают к концам штанги. Это увеличивает момент инерции системы и уменьшает, в соответствии с законом сохранения момента количества движения, ее угловую скорость. После этого нить начинает наматываться на колонку, груз поднимается вверх, не доходя, однако, до своего первоначального положения — из-за потерь энергии. Эти потери вызваны превращением механической энергии в тепловую при неупругом ударе цилиндров об упоры, наличием сил трения при движении системы и др. По шкале измеряются расстояния, проходимые грузом при его опускании и подъеме.

На диске имеются не указанные на рисунке специальные крепления. Ими можно закрепить, не пользуясь кольцом с нитями, цилиндры у поверхности колонки. Систему также можно превратить в крутильный маятник. Для этого используются две пружины, связанные нитью. Нить навивается (несколько витков) на колонку, а концы пружин закрепляются в неподвижной раме. При повороте колонки на небольшой угол из положения равновесия одна часть нити удлиняется, а другая укорачивается. Это приводит к изменению деформаций пружин, в результате чего возникает момент сил, пропорциональный углу отклонения. Необходимо только следить за тем, чтобы пружины не провисали, т. е. при всех углах отклонения были бы в натянутом состоянии.

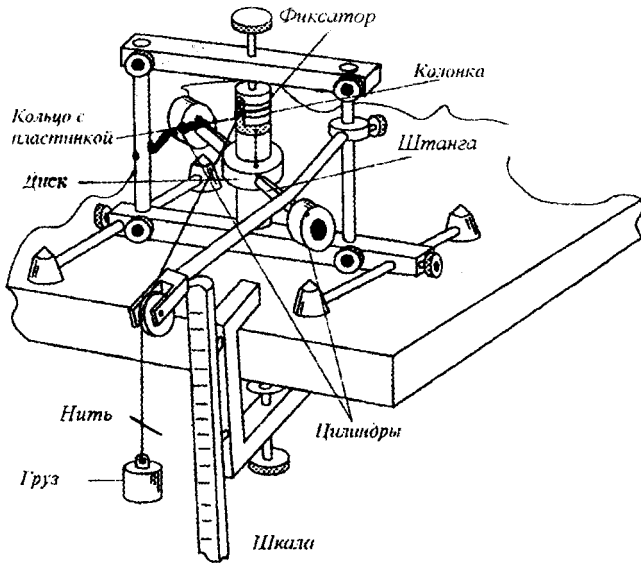


Рис. 4. Устройство установки для проверки закона сохранения момента количества движения

## Проведение эксперимента

### Упражнение 1. Определение моментов инерции $J_1$ и $J_2$ , величин работ сил трения при опускании ( $A_1$ ) и подъеме ( $A_2$ ) груза

Моменты инерции  $J_1$  и  $J_2$  определяются по формулам (10) и (11) после экспериментального определения времен опускания груза  $t_1$  и  $t_2$ .

Величины работ  $A_1$  и  $A_2$  определяются экспериментально, исходя из следующих соображений. Пусть груз при неизменном моменте инерции  $J_1$  опускается до отметки  $x_1$  и поднимается до  $x_3$ . Энергия, равная разности потенциальных энергий груза, равна работе сил трения за все время движения системы. Для величины работы при опускании груза ( $A_1$ ) и при подъеме ( $A_3$ ) имеем:

$$A_1 = -\alpha_1 \cdot x_1 \cdot mg, \quad (14)$$

$$A_3 = -\alpha_1 \cdot (x_1 - x_3) \cdot mg, \quad (15)$$

где  $\alpha_1$  — неизвестный коэффициент, характеризующий потерю механической энергии при движении колонки с моментом инерции  $J_1$ .

Значение величины  $\alpha_1$  может быть получено, исходя из закона сохранения энергии:

$$A = A_1 + A_3 = -\alpha_1 \cdot (2x_1 - x_3) \cdot mg = -x_3 \cdot mg .$$

Отсюда получим

$$\alpha_1 = \frac{x_3}{2x_1 - x_3} . \quad (16)$$

Аналогично при опускании груза с неизменным моментом инерции  $J_2$  до отметки  $x_1$  и подъеме до  $x_4$  имеем

$$A = -\alpha_2 (2x_1 - x_4) \cdot mg = -x_4 \cdot mg , \quad (17)$$

т. е.

$$\alpha_2 = \frac{x_4}{2x_1 - x_4} . \quad (18)$$

Таким образом, можно считать, что при вращении колонки с моментом инерции  $J_1$  работа сил трения будет пропорциональна пройденному грузом пути и коэффициенту  $\alpha_1$ , а с моментом инерции  $J_2$  — пропорциональна пройденному пути и коэффициенту  $\alpha_2$ . В связи с этим, при подъеме груза от нижней точки (координата  $x_1$ ) до отметки  $x_2$  работа сил трения  $A_2$  равна

$$A_2 = \alpha_2 \cdot (x_1 - x_2) \cdot mg . \quad (19)$$

### *Измерения*

1. Провести измерение  $x_1$ . Величина  $x_1$ , т. е. расстояние, проходимое грузом при полном разматывании нити определяется по шкале, когда груз находится в нижнем положении. Величину  $x_1$  заносят в табл. 1.

2. Провести измерения  $t_1$  и  $x_3$ . При измерениях цилиндры закрепляют у колонки. Навивают нить на колонку, подводя груз к нулю шкалы, останавливают его колебания. Колонку освобождают, измеряют время опускания  $t_1$  до нижней точки и координату  $x_3$ , до которой поднимется груз. Измерения проводят 3–5 раз. Результаты заносят в табл. 1.



	<i>i</i>				
	1	2	3	4	5
$x_1, S_{x_1}$					
$l_1$					
$\langle l_1 \rangle, S_{l_1}$					
$x_3$					
$\langle x_3 \rangle, S_{x_3}$					
$l_2$					
$\langle l_2 \rangle, S_{l_2}$					
$x_4$					
$\langle x_4 \rangle, S_{x_4}$					
$x_2$					
$\langle x_2 \rangle, S_{x_2}$					

3. Аналогично п.2 провести измерения  $l_2$  и  $x_4$ . Цилиндры в этом случае располагают в крайних, наиболее удаленных от оси положениях.

4. Провести измерения величины  $x_2$  т. е. координаты, до которой поднимется груз после изменения момента инерции системы. Для этого поступают следующим образом. Приблизив цилиндры к колонке, надевают пластинку кольца на конец стерженька фиксатора. Навивают виток к витку нить, соединенную с грузом, на колонку с пластинкой до тех пор, пока груз не будет на нулевой отметке шкалы. Останавливают возможные колебания груза. Освобождают колонку, после полного разматывания нити цилиндры освобождаются и переходят в положение, наиболее удаленные от оси. Отмечают положение груза на шкале  $x_2$ , когда он, начав подниматься, вновь остановится. Измерение  $x_2$  производится 3–5 раз. Результаты измерений заносятся в табл. 1.

#### Обработка результатов

1. По экспериментальным данным рассчитываются средние значения величин  $x_j$  (где  $j=2-4$ ) с использованием формулы

$$\langle x_j \rangle = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N x_{ij},$$

\* Погрешность измерения  $x_1$  определяется систематическими ошибками округления и прибора (используемой шкалы).

где  $N$  — число измерений. Аналогичные вычисления делаются и для  $t_1$  и  $t_2$ .

2. Вычислить выборочное стандартное отклонение

$$S_{x_j} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^N (x_{ij} - \langle x_j \rangle)^2}{N(N-1)}}.$$

Результаты вычислений занести в табл. 1.

3. С помощью формул (16) и (18) вычисляют значения  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ .

4. Произвести оценку погрешностей полученных значений  $\alpha_1$  и  $\alpha_2$ . В связи с тем, что измеряемая величина является косвенно измеряемой, то стандартное отклонение ошибок функции нескольких независимых переменных находится через соответствующие стандартные отклонения средних значений.

$$S_{\alpha_1}(x_1, x_3) = \sqrt{\left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_1} \cdot S_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial \alpha_1}{\partial x_3} \cdot S_{x_3}\right)^2}$$

или

$$S_{\alpha_1} = \sqrt{\left(\frac{2x_3}{(2x_1 - x_3)^2} \cdot S_x\right)^2 + \left(\frac{2x_1}{(2x_1 - x_3)^2} \cdot S_{x_3}\right)^2}$$

Аналогично для  $\alpha_2$  получаем

$$S_{\alpha_1} = \sqrt{\left(\frac{2x_4}{(2x_1 - x_4)^2} \cdot S_{x_1}\right)^2 + \left(\frac{2x_1}{(2x_1 - x_4)^2} \cdot S_{x_4}\right)^2}.$$

Результаты вычислений  $\alpha_1$ ,  $S_{\alpha_1}$  и  $\alpha_2$ ,  $S_{\alpha_2}$  заносятся в табл. 2.

Таблица 2

$\alpha_1, S_{\alpha_1}$	$\alpha_2, S_{\alpha_2}$	$A_1, S_{A_1}$	$A_2, S_{A_2}$	$J_1, S_{J_1}$	$J_2, S_{J_2}$

5. С помощью формул (14) и (19) определить величины работы  $A_1$  и  $A_2$ .

6. Провести оценку погрешностей  $S_{A_1}$  и  $S_{A_2}$ , используя методику, применяемую для определения погрешностей  $S_{\alpha_1}$  и  $S_{\alpha_2}$  (см. п. 4). Результаты вычислений  $A_1$ ,  $S_{A_1}$  и  $A_2$ ,  $S_{A_2}$  заносятся в таблицу 2.

По формулам (10), (11) найти  $J_1$  и  $J_2$ .

8. Провести оценку погрешностей  $S_{J_1}$  и  $S_{J_2}$  аналогично тому, как это делалось для  $S_{\alpha_1}$  и  $S_{\alpha_2}$  (в п. 4). Результаты вычислений заносятся в табл. 2.

### Упражнение 2. Определение отношения моментов инерции для двух конфигураций системы тел

#### Измерения

1. Определить периоды колебаний крутильного маятника  $T_1$  и  $T_2$  для двух положений цилиндров. Для этого, отсоединив нить с грузом и используя две пружины, связанные нитью, создают колебательную систему (см. описание установки). Измеряют время  $n$  полных периодов колебаний ( $n=10-20$ )  $t = nT_1$  и  $t = nT_2$ . Результаты измерений заносят в табл. 3.

Таблица 3

$N$	$t_{n1}$	$\langle t_{n1} \rangle$ , $S_{t_{n1}}$	$T_1$ , $S_{T_1}$	$t_{n2}$	$\langle t_{n2} \rangle$ , $S_{t_{n2}}$	$T_2$ , $S_{T_2}$
1						
2						
3						
4						
5						

#### Обработка результатов

1. Вычислить средние арифметические значения величин  $t_{n1}$  и  $t_{n2}$ .
2. Найти выборочные стандартные отклонения  $S_{t_{n1}}$  и  $S_{t_{n2}}$  величин  $\langle t_{n1} \rangle$  и  $\langle t_{n2} \rangle$ .
3. Вычислить средние значения и их стандартные отклонения для периодов  $T_1$  и  $T_2$ :

$$\langle T_{1,2} \rangle = \frac{\langle t_{n1,2} \rangle}{n}, \quad S_{T_{1,2}} = \frac{S_{t_{n1,2}}}{n}.$$

Результаты вычислений занести в табл. 3.

4. Определить отношение периодов  $\frac{T_1}{T_2}$  и стандартное отклонение  $S_{T_1/T_2}$  ошибки этого отклонения. Результаты вычислений занести в табл. 4.

5. Определить величину  $\frac{J_1}{J_2}$ , используя (13) и стандартное отклонение  $S_{J_1/J_2}$  для этой величины. Результаты вычислений занести в табл. 4.

Таблица 4

$\frac{T_1}{T_2}, S_{T_1/T_2}$	$\left(\frac{J_1}{J_2}\right)^2, S_{J_1/J_2}$

**Упражнение 3. Определение моментов количества движения механической системы для двух положений цилиндров. Проверка закона сохранения момента количества движения**

В связи с тем, что для расчета моментов количества движения используются данные, полученные в упр.1 и упр.2, в данном упражнении осуществляется лишь обработка результатов.

1. С помощью формул (4) и (6) вычислить значения  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , используя значения  $x_1$  (табл.1),  $A_1$  и  $A_2$  (табл.2) и  $J_1$  и  $J_2$  (табл.2).

2. Произвести оценку погрешности полученных результатов по формулам для косвенных измерений. Результаты вычислений заносятся в табл. 5.

Таблица 5

$\omega_1, S_{\omega_1}$	$\omega_2, S_{\omega_2}$	$(\omega_1 J_1), S_{(\omega_1 J_1)}$	$(\omega_2 J_2), S_{(\omega_2 J_2)}$	$(\omega_2/\omega_1), S_{(\omega_2/\omega_1)}$

3. Вычислить моменты количества движения при двух положениях цилиндров  $\omega_1 J_1$  и  $\omega_2 J_2$ . Провести оценку погрешностей определения моментов количества движения. Результаты вычислений занести в табл. 5.

4. Вычислить отношение  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ . Провести оценку погрешностей этой

величины. Результаты вычислений внести в табл. 5.

5. Провести сравнение экспериментально определенных значений моментов количества движения системы тел при двух ее конфигурациях. Для чего на оси значений  $\omega J$  (см. рис. 5) отметить значения  $\omega_1 J_1$  и

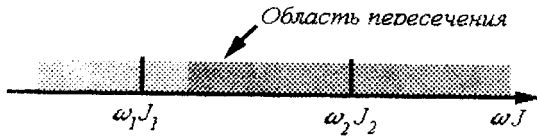


Рис. 5. Графическое представление результатов вычисления моментов количества движения для системы тел, исследуемых в работе

$\omega_2 J_2$ , а также их стандартные отклонения  $S_{(\omega_1 J_1)}$  и  $S_{(\omega_2 J_2)}$  (см. рис. 5).

На рис. 5 области  $\omega_1 J_1 \pm S_{(\omega_1 J_1)}$  и  $\omega_2 J_2 \pm S_{(\omega_2 J_2)}$  имеют различную штриховку. Пересечение этих областей указывает на выполнимость закона сохранения момента количества движения.

6. Выполнимость закона сохранения момента количества движения согласно (2) также следует из равенства отношений  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  и  $\frac{J_1}{J_2}$ . Поэтому необходимо провести сравнение экспериментально определенных

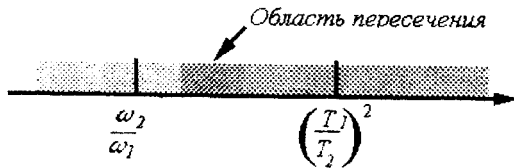


Рис. 6. Схематическое представление выполнения закона сохранения моментов количества движения для системы тел, исследуемых в работе

значений этих отношений. Для этого на оси численных значений (см.

рис. 6) отметить значения  $\frac{\omega_2}{\omega_1}$  и  $\frac{J_1}{J_2}$ , взятые из табл. 4, а также их

стандартные отклонения (см. рис. 6). Пересечение этих областей указывает на выполнимость закона сохранения момента количества движения.

### **Основные итоги работы**

*В результате выполнения работы должны быть определены значения моментов количества движения системы тел для двух ее конфигураций, осуществлена экспериментальная проверка выполнения закона сохранения момента количества движения.*

### **Литература**

1. *Матвеев А.Н.* Механика и теория относительности. М.: Высшая школа, 1986. §24.