1. Математический анализ, первый семестр

Список вопросов к экзамену

1.1. Определения (2006-2007, сем.1)

1. Сформулируйте определение ограниченного множества вещественных чисел.

2. Сформулируйте определение ограниченного сверху множества вещественных чисел.

3. Сформулируйте определение ограниченного снизу множества вещественных чисел.

4. Сформулируйте определение неограниченного множества вещественных чисел.

5. Сформулируйте определение неограниченного снизу множества вещественных чисел.

6. Сформулируйте определение неограниченного сверху множества вещественных чисел.

7. Сформулируйте определение ограниченной последовательности.

8. Сформулируйте определение неограниченной последовательности.

9. Сформулируйте определение бесконечно большой последовательности.

10. Сформулируйте определение бесконечно большой положительной последовательности.

11. Сформулируйте определение предельной точки числового множества.

12. Сформулируйте определение точной верхней грани числового множества.

13. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие подпоследовательности.

14. Сформулируйте определение предельной точки последовательности, которое использует понятие окрестности.

15. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется предельной точкой последовательности", используя понятие подпоследовательности.

16. Сформулируйте отрицание к определению "Число b называется предельной точкой последовательности", используя понятие окрестности.

17. Сформулируйте определение верхнего предела числовой последовательности.

18. Сформулируйте определение нижнего предела числовой последовательности.

19. Сформулируйте определение фундаментальной последовательности.

20. Сформулируйте определение сходящегося числового ряда.

21. Сформулируйте определение суммы числового ряда.

22. Сформулируйте определение абсолютно сходящегося числового ряда.

23. Сформулируйте определение условно сходящегося числового ряда.

24. Сформулируйте определение ограниченной на множестве X функции.

25. Сформулируйте определение ограниченной сверху на множестве X функции.

26. Сформулируйте определение ограниченной снизу на множестве X функции.

27. Сформулируйте определение неограниченной на множестве X функции.

28. Сформулируйте определение неограниченной сверху на множестве X функции.

29. Сформулируйте определение неограниченной снизу на множестве X функции.

30. Сформулируйте определение точной верхней грани функции $f(x)$ на множестве X.

31. Сформулируйте "по Коши" определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$".

32. Сформулируйте "по Коши" определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$".

33. Сформулируйте "по Коши" определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to -\infty$".

34. Сформулируйте "по Коши" определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a+0$ (правым пределом)".

35. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to a$".

36. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to +\infty$".

37. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ имеет предел при $x \to -\infty$".

38. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ называется бесконечно большой положительной при $x \to a$".

39. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ называется бесконечно большой положительной при $x \to +\infty$".

40. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to a$".

41. Сформулируйте "по Коши" определение: "Функция $f(x)$ называется бесконечно малой при $x \to +\infty$".

42. Сформулируйте "по Гейне" определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to a$".

43. Сформулируйте "по Гейне" определение: "Число b называется пределом функции $f(x)$ при $x \to +\infty$".

44. Сформулируйте "по Гейне" определение: "Функция $f(x)$ называется бесконечно большой положительной при $x \to a$".

45. Сформулируйте "по Гейне" определение: "Функция $f(x)$ называется бесконечно большой отрицательной при $x \to a+0$".

46. Сформулируйте "по Гейне" определение: "Функция $f(x)$ называется бесконечно большой положительной при $x \to -\infty$".

47. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to a$".

48. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to +\infty$".

49. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to b$ при $x \to -\infty$".

50. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to +\infty$ при $x \to a+0$".

51. Сформулируйте "по Коши" отрицание к утверждению "$f(x) \to -\infty$ при $x \to +\infty$".

52. Сформулируйте отрицание к определению "Числовая последовательность называется фундаментальной".

53. Сформулируйте определение производной.

54. Сформулируйте определение дифференцируемой функции.

55. Сформулируйте определение первого дифференциала.

56. Сформулируйте определение дифференцируемой n раз функции.

57. Сформулируйте определение дифференциала второго порядка.

58. Сформулируйте определение дифференциала n—го порядка.

59. Сформулируйте определение первообразной.

60. Сформулируйте определение неопределенного интеграла.

61. Сформулируйте определение функции $f(x)$, возрастающей в точке x_0.

62. Сформулируйте определение функции $f(x)$, убывающей в точке x_0.

63. Сформулируйте определение непрерывной в точке a функции.

64. Сформулируйте определение непрерывной на промежутке X функции.

65. Сформулируйте определение равномерно непрерывной на промежутке X функции.

66. Сформулируйте определение точки разрыва функции $f(x)$.

67. Сформулируйте определение точки устранимого разрыва функции $f(x)$.

68. Сформулируйте определение точки разрыва первого рода функции $f(x)$.

69. Сформулируйте определение точки разрыва второго рода функции $f(x)$.

70. Сформулируйте определение точки локального эстремума функции $f(x)$.

71. Сформулируйте определение точки локального максимума функции $f(x)$.

72. Сформулируйте определение точки перегиба графика функции $y = f(x)$.

73. Сформулируйте определение наклонной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

74. Сформулируйте определение вертикальной асимптоты графика функции $y = f(x)$.

75. Сформулируйте определение обратной функции.

76. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$. Сформулируйте *отрицание* к определению "Функция $f(x)$ в точке $x = a$ имеет разрыв первого рода".

77. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$. Сформулируйте *отрицание* к определению "Функция $f(x)$ в точке $x = a$ имеет устранимый разрыв".

78. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$. Сформулируйте *отрицание* к определению "Функция $f(x)$ в точке $x = a$ имеет разрыв второго рода".

79. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$. Сформулируйте *отрицание* к определению "Точка $x = a$ называется точкой локального максимума функции $f(x)$".

80. Пусть функция $f(x)$ определена в окрестности точки $x = a$. Сформулируйте *отрицание* к определению "Точка $x = a$ называется точкой локального минимума функции $f(x)$".

1.2. Формулировки теорем (2006-2007, сем.1)

1. Сформулируйте критерий Коши для последовательностей.

2. Сформулируйте критерий Коши для предела функции при $x \to a$.

3. Сформулируйте критерий Коши для предела функции при $x \to +\infty$.

4. Сформулируйте теорему о дифференцировании сложной функции. Поясните, как можно использовать эту теорему и тождество $f\big(f^{-1}(x)\big) = x$ для вывода формулы производной обратной функции.

5. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Найдите производную функции $f(x) = \operatorname{arctg} x$.

6. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Найдите производную функции $f(x) = \arcsin x$.

7. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Найдите производную функции $f(x) = e^x$, используя формулу $(\ln x)' = \frac{1}{x}$.

8. Сформулируйте теорему о дифференцировании обратной функции. Найдите производную функции $f(x) = \ln x$, используя формулу $(e^x)' = e^x$.

9. Сформулируйте необходимое условие сходимости числового ряда.

10. Сформулируйте интегральный признак сходимости числового ряда.

11. Сформулируйте признак сравнения для числовых рядов.

12. Сформулируйте признак Даламбера сходимости числового ряда в "непредельной форме".

13. Сформулируйте признак Даламбера сходимости числового ряда в "предельной форме".

14. Сформулируйте признак Коши сходимости числового ряда в "непредельной форме".

15. Сформулируйте признак Коши сходимости числового ряда в "предельной форме".

16. Сформулируйте признак Лейбница сходимости числового ряда.

17. Сформулируйте признак Абеля-Дирихле сходимости числового ряда.

18. Сформулируйте теорему о перестановке членов условно сходящегося числового ряда.

19. Сформулируйте теорему об интегрировании по частям.

20. Сформулируйте теорему об интегрировании методом замены переменной.

21. Сформулируйте теорему о локальной ограниченности функции, неперерывной в данной точке.

22. Сформулируйте теорему об устойчивости знака функции, неперерывной в данной точке.

23. Сформулируйте теорему о свойстве непрерывной функции, принимающей значения противоположных знаков на концах сегмента $[a,\ b]$.

24. Сформулируйте теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

25. Сформулируйте теорему Кантора.

26. Сформулируйте первую теорему Вейерштрасса.

27. Сформулируйте вторую теорему Вейерштрасса.

28. Сформулируйте необходимое условие возрастания дифференцируемой функции на интервале $(a;\ b)$.

29. Сформулируйте достаточное условие возрастания дифференцируемой функции на интервале $(a;\ b)$.

30. Сформулируйте необходимые условия убывания дифференцируемой функции на интервале $(a;\ b)$.

31. Сформулируйте достаточные условия убывания дифференцируемой функции на интервале $(a;\ b)$.

32. Сформулируйте достаточное условие возрастания в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.

33. Сформулируйте необходимое условие возрастания в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.

34. Сформулируйте достаточное условие убывания в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.

35. Сформулируйте необходимое условие убывания в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.

36. Сформулируйте теорему о формуле Лагранжа.

37. Сформулируйте теорему о формуле Коши.

38. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

39. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в общей форме.

40. Сформулируйте теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

41. Сформулируйте необходимое условие экстремума дифференцируемой функции.

42. Сформулируйте достаточные условия экстремума дважды дифференцируемой функции.

43. Сформулируйте достаточные условия экстремума дифференцируемой функции.

44. Сформулируйте достаточные условия существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

45. Сформулируйте необходимые условия существования наклонной асимптоты графика функции $f(x)$ при $x \to +\infty$.

46. Сформулируйте необходимые условия перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

47. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие вторую производную.

48. Сформулируйте достаточные условия перегиба графика функции, использующие третью производную.

1.3. Простые задачи (2006-2007, сем.1)

1. Найдите все предельные точки последовательности $x_n = (-1)^n$.

2. Найдите все предельные точки последовательности $x_n = \sin\left(\frac{\pi n}{2} + \frac{1}{n}\right)$.

3. Найдите все предельные точки последовательности $x_n =$ дробная часть числа $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$.

4. Найдите все предельные точки последовательности $1;\ \frac{1}{2};\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ 1;\ \frac{1}{2};\ \frac{1}{3};\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{5};\ \frac{1}{6};\ldots$

5. При каких $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+n^p}}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

6. При каких $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

7. При каких значениях параметра p ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{p^n}{n^2}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

8. При каких $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} p^n \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

9. При каких $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(p + \frac{p^2}{n}\right)^n$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

10. При каких $p > 0$ ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} n^p \sin\pi(n + \frac{1}{n})$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

11. При каких x ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

12. При каких x ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} nx^n$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

13. При каких p ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^p}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

14. При каких p ряд $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

15. При каких p ряд $\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n^p \ln n}$ сходится **(1)** абсолютно, **(2)** условно.

16. Найдите производную 10–го порядка функции $f(x) = x\ln x$.

17. Найдите производную 20–го порядка функции $f(x) = \sqrt{x}$.

18. Найдите производную 30–го порядка функции $f(x) = xe^{-x}$.

19. Найдите производную 40–го порядка функции $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$.

20. Найдите производную 12–го порядка функции $f(x) = x\sin x$.

21. Найдите производную 100–го порядка функции $f(x) = x^2 e^x$.

22. Найдите производную 200–го порядка функции $f(x) = x^2 \sin x$.

23. Найдите производную 60–го порядка функции $f(x) = x\cos x$.

24. Найдите производную 71–го порядка функции $f(x) = x^2 \cos x$.

25. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{2^n}{n^{2005}}$ **(II)** $x_n = \frac{\log_{2005} n}{n^{1,01}}$ **(III)** $x_n = \frac{1}{\sqrt[n]{n}-1}$, $n \geqslant 2$
(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. **(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

26. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{n!}{n^n}$ **(II)** $x_n = \frac{1{,}001^n}{n^7}$ **(III)** $x_n = \frac{n^{1,01}}{\log_3 n}$, $n \geqslant 2$
(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. **(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

27. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{\log_9(n^{2005})}{2^n}$ **(II)** $x_n = \frac{2^n}{n!}$ **(III)** $x_n = \frac{2{,}005^n}{n^{2005}}$
(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. **(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

28. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{n^{2,005}}{2005^n}$ **(II)** $x_n = \frac{\sqrt[2005]{n}}{\log_{2005} n}$, $n \geqslant 2$ **(III)** $x_n = \frac{n!}{4^n}$

(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. **(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

29. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{\log_2 n}{\left(\sqrt[5]{n}\right)^n}$ **(II)** $x_n = \frac{n!}{3^n}$ **(III)** $x_n = \frac{\left(\sqrt{2}\right)^n}{n^3}$
(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. **(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

30. Для каждой последовательности укажите все верные утверждения:
(I) $x_n = \frac{3^n}{n^2}$ **(II)** $x_n = \frac{\log_{1/3} n}{n^2}$ **(III)** $x_n = \frac{n^n}{n!}$
(a) x_n – бесконечно большая (б.б.) положительная. **(b)** x_n является б.б., но не является б.б. положительной.
(c) x_n – неограниченная, но не является б.б. **(d)** x_n – ограниченная, но не имеет предела.
(e) x_n сходится, но не является бесконечно малой. **(f)** x_n – бесконечно малая.

31. Найдите $\int \sqrt{x}\,\ln x\,dx$.

32. Найдите $\int x \ln\sqrt{x}\,dx$

33. Найдите $\int \sin\bigl(\ln x\bigr)\,dx$.

34. Найдите $\int \frac{\cos(\ln x)}{x^2}\,dx$.

35. Найдите $\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{1+e^x}}\,dx$.

36. Найдите $\int e^x\sqrt{1+e^x}\,dx$.

37. Найдите $\int \ln\Bigl(x+\sqrt{x^2-1}\Bigr)\,dx$.

38. Найдите $\int \ln\Bigl(\sqrt{x^2+1}-x\Bigr)\,dx$.

39. Все задачи из списка задач к зачету.

1.4. Простые вопросы (2006-2007, сем.1)

1. Пусть $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x)=0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x)=0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0} x f(x)=0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$

2. Пусть $f(x)=o(x^2)$ при $x\to 0$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x)=0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}=0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} x f(x)=0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x)=0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^3}=0$

3. Пусть $f(x)=o(x^{-1})$ при $x\to +\infty$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x f(x)=0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x^2 f(x)=0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x^{-1})=0$

4. Пусть $f(x)=o(x^{-2})$ при $x\to +\infty$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x}=0$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x^{-2})=0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x)=0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x^2 f(x)=0$
$\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{x^2}=0$ $\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to +\infty} x f(x)=0$

5. Пусть $f(x)=o(x)$ при $x\to 0$. Укажите все верные утверждения.
$\boxed{1}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x)$ $\boxed{2}$ $\exists \lim_{x\to 0} f(x)=0$ $\boxed{3}$ $\exists \lim_{x\to 0} x f(x)=0$ $\boxed{4}$ $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x}=0$ $\boxed{5}$ $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{x^2}$
$\boxed{6}$ $\exists \lim_{x\to 0} x^2 f(x)$

6. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to a} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to a} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to a}(f(x)+g(x))$.

7. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to +\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to +\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to +\infty}(f(x)+g(x))$.

8. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to 0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))$.

9. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to +\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to +\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to +\infty}\frac{f(x)}{g(x)}$.

10. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to 0} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to 0} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to 0}\frac{f(x)}{g(x)}$.

11. Приведите пример: $\nexists \lim_{x\to-\infty} f(x)$ и $\nexists \lim_{x\to-\infty} g(x)$, но $\exists \lim_{x\to-\infty}(f(x)-g(x))$.

12. Докажите неравенство Бернулли $(1+x)^n \geqslant 1+nx$ при $x \geqslant -1$ и $n \geqslant 1$.

13. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n$ монотонна.

14. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}$ монотонна.

15. Укажите все верные утверждения. Если функция $f(x)$ дифференцируема в точке $x = x_0$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ найдется окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна.
$\boxed{\mathbf{2}}$ найдется окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.
$\boxed{\mathbf{3}}$ график $f(x)$ имеет касательную в точке $(x_0,\ f(x_0))$.
$\boxed{\mathbf{4}}$ $f(x)-f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ при $x \to x_0$. $\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x)$ непрерывна в точке x_0.

16. Укажите все верные утверждения. Если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = x_0$, но не является дифференцируемой в этой точке, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ в любой окрестности точки x_0 функция $f(x)$ является неограниченной.
$\boxed{\mathbf{2}}$ график функции $y = f(x)$ не имеет наклонной касательной в точке $\big(x_0, f(x_0)\big)$.
$\boxed{\mathbf{3}}$ функция $f(x)-f(x_0)$ не является бесконечно малой при $x \to x_0$.
$\boxed{\mathbf{4}}$ найдется окрестность точки x_0, в каждой точке которой $f(x)$ разрывна
$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x)$ имеет вертикальную касательную в точке x_0.
$\boxed{\mathbf{6}}$ $\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ при $x \to x_0$.

17. Укажите утверждения, выполнение любого из которых является достаточным условием дифференцируемости функции $f(x)$ в точке $x = x_0$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ $\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ при $x \to x_0$. $\boxed{\mathbf{2}}$ $f(x)$ непрерывна в точке x_0.
$\boxed{\mathbf{3}}$ Найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна.
$\boxed{\mathbf{4}}$ Функция $f(x)$ имеет вторую производную в точке x_0.
$\boxed{\mathbf{5}}$ $f(x)-f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.
$\boxed{\mathbf{6}}$ График функции $f(x)$ имеет наклонную касательную в точке x_0.

18. Укажите все верные утверждения. Если график функции $f(x)$ имеет наклонную касательную в точке $\big(x_0, f(x_0)\big)$, то

$\boxed{\mathbf{1}}$ $f(x)$ непрерывна в точке x_0. $\boxed{\mathbf{2}}$ функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
$\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x)-f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.
$\boxed{\mathbf{4}}$ найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.
$\boxed{\mathbf{5}}$ $\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ при $x \to x_0$.
$\boxed{\mathbf{6}}$ найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна.

19. Укажите утверждения, выполнение любого из которых является достаточным условием существования наклонной касательной к графику функции $y = f(x)$ в точке $\big(x_0, f(x_0)\big)$.

$\boxed{\mathbf{1}}$ найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ ограничена.
$\boxed{\mathbf{2}}$ $\exists A:\ f(x) = f(x_0) + A(x-x_0) + o(x-x_0)$ при $x \to x_0$. $\boxed{\mathbf{3}}$ $f(x)$ непрерывна в точке x_0.
$\boxed{\mathbf{4}}$ найдется такая окрестность точки x_0, в которой $f(x)$ непрерывна.
$\boxed{\mathbf{5}}$ функция $f(x)$ дифференцируема в точке x_0.
$\boxed{\mathbf{6}}$ $f(x)-f(x_0)$ – бесконечно малая функция при $x \to x_0$.

20. Известно, что непрерывная функция $y = f(x)$ имеет положительную вторую производную на промежутке $x \in (a;\ a+\delta)$ и имеет отрицательную вторую производную на промежутке $x \in (a-\delta;\ a)$. Достаточно ли этих условий для того, чтобы в точке $M(a;\ f(a))$ график функции имел точку перегиба?

21. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;\ b]$, $f(a)f(b) < 0$, и уравнение $f(x) = 0$ не имеет корней на $(a;\ b)$. Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a;\ b]$.

22. Пусть функция $f(x)$ определена на $[a;\ b]$, $f(a) < f(b)$, и $\exists c \in (f(a);\ f(b))$ такое, что уравнение $f(x) = c$ не имеет корней на $(a;\ b)$. Докажите, что функция $f(x)$ не является непрерывной на $[a;\ b]$.

23. Докажите, что если функция $f(x)$ непрерывна в точке $x = a$ и в любой окрестности точки a найдутся точки x_1 и x_2 такие, что $f(x_1)f(x_2) < 0$, то $f(a) = 0$.

24. Докажите, что если $f(a) > 0$ и $\forall\delta > 0\ \exists x$ такое, что $0 < |x - a| < \delta,\ f(x) < 0$, то функция $f(x)$ является разрывной в точке $x = a$.

25. Пусть $f(x) = \frac{\ln x}{x^2}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x^3\cdot\sqrt{x}}\right)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\boxed{5}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x^3\cdot\ln x}\right)$

26. Пусть $f(x) = \frac{\ln x}{x}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{\sqrt{x}}\right)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\boxed{5}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$

27. Пусть $f(x) = \frac{1}{x^2\cdot\ln x}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x^3}\right)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ $\boxed{5}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

28. Пусть $f(x) = \frac{1}{x\cdot\ln x}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x}\right)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x}\right)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{\ln x}\right)$ $\boxed{5}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$

29. Пусть $f(x) = \frac{\ln x}{x^3}$. Укажите все утверждения, верные при $x \to +\infty$:
$\boxed{1}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x^2}\right)$ $\boxed{2}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2}\right)$ $\boxed{3}$ $f(x) = o\left(\frac{\ln x}{x^3\cdot\sqrt{x}}\right)$ $\boxed{4}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x^3}\right)$ $\boxed{5}$ $f(x) = o\left(\frac{1}{x^2\cdot\ln x}\right)$

30. Докажите, что $o(x^2)\cdot o(x^3) = o(x^5)$ при $x \to 0$.

31. Докажите, что $o(\sqrt{x})\cdot o(\sqrt[3]{x}) = o(\sqrt[6]{x^5})$ при $x \to +0$.

32. Пусть $\alpha > 0,\ \beta > 0$. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma)$ при $x \to +0$. Ответ должен быть обоснован.

33. Пусть $\alpha < 0,\ \beta < 0$. Укажите все возможные значения γ, при которых $o(x^\alpha) + o(x^\beta) = o(x^\gamma)$ при $x \to +\infty$. Ответ должен быть обоснован.

34. Докажите, что если $\exists f'(x_0)$, то $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + f'(x_0)\cdot\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$.

35. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке x_0, то $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0) + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \neq 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

36. Докажите, что если существует число A такое, что $f(x_0 + \Delta x) = f(x_0) + A\cdot\Delta x + o(\Delta x)$ при $\Delta x \to 0$, то $\exists f'(x_0)$.

37. Докажите, что если существует дифференциал функции $f(x)$ в точке $x = x_0$, то существует число A такое, что $\frac{f(x_0+\Delta x)-f(x_0)}{\Delta x} = A + \alpha(\Delta x)$ при $\Delta x \neq 0$, где $\alpha(\Delta x)$ – бесконечно малая функция при $\Delta x \to 0$.

38. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\sqrt{1+x} = 1 + \frac{x}{2} - \frac{x^2}{8} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

39. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

40. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

41. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

42. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^2)$ при $x \to 0$.

43. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\sin x = x - \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

44. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\arcsin x = x + \frac{x^3}{6} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

45. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\operatorname{arctg} x = x - \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

46. Докажите, не пользуясь формулой Тейлора, что $\operatorname{tg} x = x + \frac{x^3}{3} + o(x^3)$ при $x \to 0$.

47. Докажите, что $\sin x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k\frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+1})$ при $x \to 0$.

48. Докажите, что $\cos x = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n})$ при $x \to 0$.

49. Докажите, что $e^x = \sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

50. Докажите, что $e^{-x} = \sum_{k=0}^{n}(-1)^k \frac{x^k}{k!} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

51. Докажите, что $\frac{1}{1+x} = 1 + \sum_{k=1}^{n}(-1)^k x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$.

52. Докажите, что $\frac{1}{1-x} = 1 + \sum_{k=1}^{n} x^k + o(x^n)$ при $x \to 0$.

53. Докажите, что $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

54. Докажите, что $\ln(1+x) = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1} \frac{x^k}{k} + o(x^n)$ при $x \to 0$.

55. Приведите пример функции, которая в каждой точке интервала $(-1;\ 1)$ является дифференцируемой, а в точке $x = 0$ не имеет второй производной.

1.5. Теоремы с доказательством (2006-2007, сем.1)

1. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Коши".

2. Докажите, что если $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Коши", то $\lim_{x\to a} f(x) = b$ "по Гейне".

3. Докажите, что если $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ "по Коши".

4. Докажите, что если $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ "по Коши", то $\lim_{x\to +\infty} f(x) = b$ "по Гейне".

5. Докажите, что если $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$ "по Гейне", то $f(x) \to +\infty$ при $x \to a$ "по Коши".

6. Докажите, что если $\lim_{x\to a+0} f(x) = b$ "по Гейне", то $\lim_{x\to a+0} f(x) = b$ "по Коши".

7. Докажите, что возрастающая ограниченная последовательность имеет предел.

8. Докажите, что убывающая ограниченная последовательность имеет предел.

9. Докажите, что последовательность $x_n = \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n$ сходится.

10. Пусть функция $f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $(a;\ +\infty)$. Докажите, что $\exists \lim_{x\to +\infty} f(x)$.

11. Пусть функция $f(x)$ убывает и ограничена на интервале $(a;\ b)$. Докажите, что $\exists \lim_{x\to b-0} f(x)$.

12. Пусть функция $y = f(x)$ возрастает и ограничена на промежутке $x \in (a;\ b)$. Докажите, что $\forall c \in (a;\ b)\ \exists \lim_{x\to c-0} f(x)$.

13. Докажите, что фундаментальная последовательность является ограниченной.

14. Докажите, что фундаментальная последовательность является сходящейся.

15. Докажите, что сходящаяся последовательность является фундаментальной.

16. Сформулируйте критерий Коши для $\lim_{x\to a} f(x)$. Докажите достаточность условия Коши.

17. Сформулируйте критерий Коши для $\lim_{x\to +\infty} f(x)$. Докажите необходимость условия Коши.

18. Сформулируйте и докажите теорему о производной суммы двух функций.

19. Сформулируйте и докажите теорему о производной произведения двух функций.

20. Сформулируйте и докажите теорему о производной частного двух функций.

21. Сформулируйте и докажите теорему о производной сложной функции.

22. Сформулируйте и докажите теорему о производной обратной функции.

23. Сформулируйте и докажите теорему о производной функции, заданной параметрически.

24. Докажите теорему Ролля.

25. Докажите теорему Лагранжа (формулу конечных приращений).

26. Докажите, что многочлен Тейлора $P_n(x)$ дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$ и все его производные до n-го порядка включительно в точке x_0 равны соответственно $f(x_0)$ и $f^{(k)}(x_0)$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

27. Докажите, что если $\exists f''(0)$, то $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2}f''(0) \cdot x^2 + o(x^2)$ при $x \to 0$.

28. Докажите, что если $\exists f'''(0)$, то $f(x) = f(0) + f'(0) \cdot x + \frac{1}{2}f''(0) \cdot x^2 + \frac{1}{6}f'''(0) \cdot x^3 + o(x^3)$ при $x \to 0$.

29. Пусть $P_n(x)$ — многочлен Тейлора дифференцируемой n раз в точке x_0 функции $f(x)$. Докажите, что $f(x_0 + \Delta x) = P_n(x_0) + o((\Delta x)^n)$.

30. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Пеано.

31. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в общей форме.

32. Докажите теорему о формуле Тейлора с остаточным членом в форме Лагранжа.

33. Сформулируйте и докажите теорему об обобщенной формуле конечных приращений (Коши).

34. Докажите теорему о правиле Лопиталя для вычисления $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$.

35. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дважды дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0) = 0,\ g(x_0) = 0,\ f'(x_0) = 0,\ g'(x_0) = 0,\ g''(x_0) \neq 0$, то $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f''(x_0)}{g''(x_0)}$.

36. Докажите, что если функции $f(x)$ и $g(x)$ дифференцируемы в точке x_0, $f(x_0) = 0,\ g(x_0) = 0,\ g'(x_0) \neq 0$, то $\exists \lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f'(x_0)}{g'(x_0)}$.

37. Докажите, что произведение двух бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

38. Докажите, что сумма двух бесконечно малых функций является бесконечно малой функцией.

39. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) + g(x)\big) = A + B$.

40. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) - g(x)\big) = A - B$.

41. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B$, то $\exists \lim_{x\to a}\big(f(x) \cdot g(x)\big) = A \cdot B$.

42. Докажите, что если $\exists \lim_{x\to a} f(x) = A$, $\exists \lim_{x\to a} g(x) = B \neq 0$, то $\exists \lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{A}{B}$.

43. Докажите, что сумма бесконечно малой функции и ограниченной функции является ограниченной функцией.

44. Докажите, что произведение двух ограниченных функций является ограниченной функцией.

45. Докажите теорему о локальной ограниченности функции, имеющей предел в точке.

46. Докажите теорему об устойчивости знака непрерывной функции.

47. Докажите теорему о прохождении непрерывной функции через любое промежуточное значение.

48. Докажите теорему о непрерывной функции, принимающей значения разных знаков на концах отрезка.

49. Докажите первую теорему Вейерштрасса.

50. Докажите вторую теорему Вейерштрасса.

51. Обьясните, в каком месте нарушится ход доказательства первой теоремы Вейерштрасса, если в условии теоремы заменить "сегмент" на "интервал".

52. Докажите теорему Кантора.

53. Докажите теорему о достаточном условии возрастания в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.

54. Докажите теорему о необходимом условии возрастания в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.

55. Докажите теорему о достаточном условии убывания в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.

56. Докажите теорему о необходимом условии убывания в точке x_0 функции $f(x)$, дифференцируемой в точке x_0.

57. Сформулируйте достаточные условия того, что дифференцируемая на интервале $(a;\ b)$ функция является убывающей на этом интервале. Докажите соответствующую теорему.

58. Сформулируйте необходимые условия того, что дифференцируемая на интервале $(a;\ b)$ функция является убывающей на этом интервале. Докажите соответствующую теорему.

59. Докажите теорему о необходимом условии экстремума дифференцируемой функции.

60. Докажите теорему о достаточных условиях экстремума дважды дифференцируемой функции.

61. Докажите теорему о необходимых условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

62. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика дважды дифференцируемой функции.

63. Докажите теорему о достаточных условиях перегиба графика трижды дифференцируемой функции.

64. Докажите, что если $f''(x) < 0$ на промежутке $x \in (a;\ b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом промежутке направлен выпуклостью вверх.

65. Докажите, что если $f''(x) > 0$ на промежутке $x \in (a;\ b)$, то график функции $y = f(x)$ на этом промежутке направлен выпуклостью вниз.

66. Докажите, что из любой ограниченной числовой последовательности можно выбрать сходящуюся подпоследовательность.

67. Докажите, что ограниченная числовая последовательность имеет по крайней мере одну предельную точку.

68. Докажите, что если число b является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие окрестности, то то же число является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие подпоследовательности.

69. Докажите, что если число b является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие подпоследовательности, то то же число является предельной точкой последовательности по определению, использующему понятие окрестности.

70. Докажите, что ограниченная последовательность имеет верхний и нижний пределы.

71. Докажите теорему об интегрировании по частям.

72. Докажите теорему об интегрировании методом замены переменной.

73. Докажите теорему о необходимом условии сходимости числового ряда.

74. Докажите теорему о признаке Коши для числового ряда с положительными членами в "непредельной" форме.

75. Докажите теорему о признаке Коши для числового ряда с положительными членами в "предельной" форме.

76. Докажите теорему о признаке Даламбера для числового ряда с положительными членами в "непредельной" форме.

77. Докажите теорему о признаке Даламбера для числового ряда с положительными членами в "предельной" форме.

1.6. Сложные задачи (2006-2007, сем.1)

1. Пусть функция $y = f(x)$ определена и возрастает на промежутке $x \in (a;\ b)$ и $\forall c \in (a;\ b)$ $\exists \lim_{x\to c-0} f(x)$, $\exists \lim_{x\to c+0} f(x)$, и эти пределы равны друг другу. Докажите, что $f(x)$ непрерывна на указанном промежутке.

2. Докажите, что фундаментальная последовательность имеет единственную предельную точку.

3. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{\ln n}{n^\alpha}$ при $\alpha > 0$ является бесконечно малой.

4. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{n^a}{b^n}$ при $b > 1$ является бесконечно малой.

5. Докажите, что $\forall b \ \lim_{n\to+\infty} \frac{b^n}{n!} = 0$.

6. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{n!}{n^n} = 0$.

7. Не пользуясь правилом Лопиталя, докажите, что последовательность $x_n = \frac{b^n}{n^a}$ при $b > 1$ является бесконечно большой.

8. Докажите, что $\lim_{n\to+\infty} \frac{\ln n}{n} = 0$.

9. Докажите, что последовательность $x_n = \sqrt[n]{n} - 1$ является бесконечно малой.

10. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x \cdot (1+x)^{\frac{1}{x}}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

11. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{x+1}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

12. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x \cdot (1-x^2)^{\operatorname{ctg}^2 x}, \ x \neq 0, \\ 0, \ x = 0, \end{cases}$ имеет производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

13. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1-2x}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

14. Докажите, что функция $f(x) = \begin{cases} x^{1+\sqrt{2x}}, & \text{если } x > 0, \\ 0, & \text{если } x = 0, \end{cases}$ имеет правую производную в точке $x = 0$ и найдите ее значение.

15. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \sin\frac{1}{x}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

16. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \cos\frac{1}{x}, \ \text{если } x \neq 0, \\ 0, \ \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

17. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \cos\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

18. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\frac{1}{x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\exists f'(x)$ при $x \neq 0$, $\exists f'(0)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$.

19. Пусть $f(x) = \begin{cases} x^2 \cdot \sin\left(e^{-1/x}\right), & x \neq 0, \\ 0, & x = 0. \end{cases}$ Докажите, что $\forall x \, \exists f'(x)$, $\nexists \lim_{x\to 0} f'(x)$. Найдите $f'(0)$.

20. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

21. Пусть $f(x) = \begin{cases} e^{-\left|1/x^3\right|}, & \text{если } x \neq 0, \\ 0, & \text{если } x = 0. \end{cases}$ Найдите $f'(0)$.

22. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $x \in [a;\ +\infty)$, $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, и $f(a) = b$. Докажите, что функция $f(x)$ достигает своей точной верхней грани на промежутке $x \in [a;\ +\infty)$.

23. Пусть функция $f(x)$ непрерывна на промежутке $x \in [a;\ +\infty)$, $\exists \lim_{x\to+\infty} f(x) = b$, $f(a) = b$, $\exists c \in (a;\ +\infty) : f(c) < b$. Докажите, что функция $f(x)$ достигает своей точной нижней грани на промежутке $x \in (a;\ +\infty)$.

24. Приведите пример функции $f(x)$, непрерывной и ограниченной на промежутке $x \in [a;\ +\infty)$, которая не достигает своей точной верхней грани на этом промежутке.

25. Докажите, что $\forall x$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$ сходится и его сумма равна $\sin x$.

26. Докажите, что $\forall x$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$ сходится и его сумма равна $\cos x$.

27. Докажите, что $\forall x$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n!}$ сходится и его сумма равна e^x.

28. Докажите, что $\forall x$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n \frac{x^n}{n!}$ сходится и его сумма равна e^{-x}.

29. Докажите, что $\forall x \in (-\frac{1}{2};\ \frac{1}{2})$ числовой ряд $\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^n$ сходится и его сумма равна $\frac{1}{1+x}$.

30. Докажите, что $\forall x \in (0;\ 1)$ числовой ряд $\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n-1} \frac{x^n}{n}$ сходится и его сумма равна $\ln(1+x)$.

31. Пусть $f(x) = \arcsin x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

32. Пусть $f(x) = \operatorname{arctg} x$. Найдите $f^{(n)}(0)$.

33. Докажите, что функция $f(x) = \sqrt{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0;\ +\infty)$.

34. Докажите, что функция $f(x) = \operatorname{arctg} \sqrt[3]{x}$ равномерно непрерывна на интервале $(0;\ +\infty)$.

35. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(0;\ +\infty)$ и $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, то $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном интервале.

36. Докажите, что если функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервале $(0;\ +\infty)$ и имеет наклонную асимптоту, то $f(x)$ равномерно непрерывна на указанном интервале.